

## Διάλεξη 11

### Ρίζες της μονάδας

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ο αριθμός 1 έχει μία μοναδική  $n$ -οστή ρίζα εάν  $n$  είναι περιττός, ενώ έχει δύο  $n$ -οστές ρίζες, 1 και  $-1$ , εάν ο  $n$  είναι άρτιος. Θα δούμε ότι στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ο αριθμός 1 έχει ακριβώς  $n$   $n$ -οστές ρίζες για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ .

Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε το  $z$  σε τριγωνομετρική μορφή,  $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  και έχουμε

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = 1,$$

συνεπώς  $r^n = 1$ ,  $\cos(n\vartheta) = 1$  και  $\sin(n\vartheta) = 0$ . Συμπεραίνουμε ότι κάθε  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας γράφεται στη μορφή  $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ , όπου  $\vartheta$  ικανοποιεί τις σχέσεις  $\cos(n\vartheta) = 1$  και  $\sin(n\vartheta) = 0$ . Από τις σχέσεις αυτές έχουμε ότι  $n\vartheta = 2k\pi$  για  $k \in \mathbb{Z}$ , και συνεπώς ότι

$$\vartheta = \frac{k}{n} 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Απομένει να δούμε ποιές από αυτές τις τιμές του ορίσματος δίδουν διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς. Εάν συμβολίσουμε  $\vartheta_k = \frac{2k\pi}{n}$ , έχουμε

$$\vartheta_{k+n} = \vartheta_k + 2\pi$$

και συνεπώς  $\cos \vartheta_{k+n} + i \sin \vartheta_{k+n} = \cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k$ . Για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , έχουμε τις τιμές

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad \dots, \quad \vartheta_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

οι οποίες δίδουν όλες διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς.

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακριβώς  $n$   $n$ -οστες ρίζες της μονάδας στο μιγαδικό επίπεδο, οι αριθμοί

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

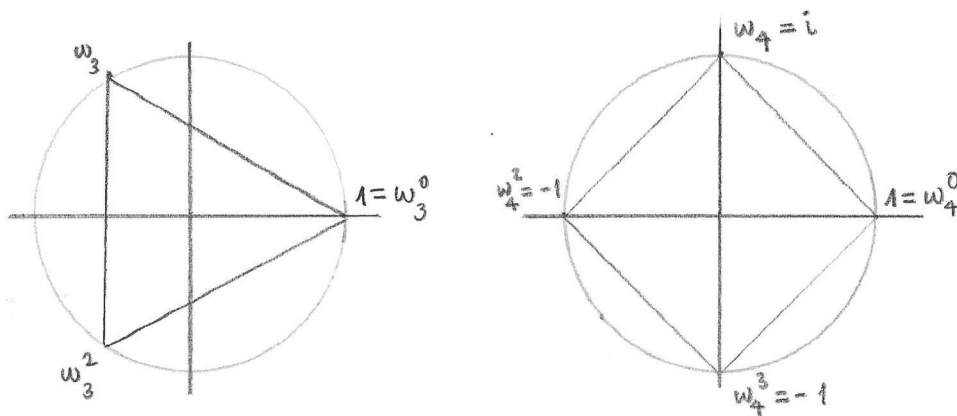
για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Εάν τώρα ορίσουμε  $\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , οι δυνάμεις  $\omega_n^k$ , για  $k = 0, \dots, n-1$ , δίδουν όλες τις  $n$  διαφορετικές  $n$ -οστές ρίζες της μονάδας

$$\omega_n^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Η  $n$ -οστή ρίζα  $\omega_n$ , η οποία έχει το μικρότερο θετικό όρισμα, ονομάζεται **πρωταρχική**  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας.

Πού βρίσκονται αυτοί οι αριθμοί στο μιγαδικό επίπεδο; Για  $k = 0$  έχουμε το 1. Όλες οι  $n$ -οστές ρίζες της μονάδας βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , και η γωνία που σχηματίζεται από το 0 μεταξύ διαφορετικών ριζών είναι πολλαπλάσιο του  $\frac{2\pi}{n}$ . Συμπεραίνουμε ότι οι  $n$ -οστές ρίζες βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, με  $n$  κορυφές, μία εκ των οποίων βρίσκεται στο 1. Στο Σχήμα 3.6 βλέπουμε τις τρίτες ρίζες της μονάδας, που βρίσκονται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου, και τις τέταρτες ρίζες, στις κορυφές ενός τετραγώνου.



Σχήμα 3.6: Τρίτες και τέταρτες ρίζες της μονάδας

**Παράδειγμα 3.9** Θα υπολογίσουμε τις πέμπτες ρίζες της μονάδας. Εάν  $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$  είναι μία πέμπτη ρίζα της μονάδας, τότε  $z^5 = \cos(5\vartheta) + i \sin(5\vartheta) = 1$ , άρα  $5\vartheta = 2k\pi$ , για κάποιο ακέραιο  $k$ .

Ορίζουμε  $\omega_5 = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5)$ . Τότε οι διαφορετικές πέμπτες ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$\begin{aligned}\omega_5^0 &= 1, \\ \omega_5 &= \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5), \\ \omega_5^2 &= \cos(4\pi/5) + i \sin(4\pi/5), \\ \omega_5^3 &= \cos(6\pi/5) + i \sin(6\pi/5), \\ \omega_5^4 &= \cos(8\pi/5) + i \sin(8\pi/5).\end{aligned}$$

**Δραστηριότητα 3.13** Στο μιγαδικό επίπεδο σχεδιάστε το κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο  $S^1$ , έτσι ώστε να έχει μία κορυφή στο 1, και σημειώστε τις έκτης ρίζες της μονάδας.

**Δραστηριότητα 3.14** Εάν  $\omega_8$  είναι η πρωταρχική όγδοη ρίζα της μονάδας, σημειώστε στο μιγαδικό επίπεδο και γράψτε στη μορφή  $a + bi$  τον μιγαδικό αριθμό  $\omega_8^5$ .

**Παράδειγμα 3.10** Εξετάζουμε το άθροισμα των  $n$ -οστών ριζών της μονάδας,

$$Q = 1 + w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} w_n Q &= w_n(1 + w_n + \dots + w_n^{n-1}) \\ &= w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1} + w_n^n \\ &= Q \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι  $(w_n - 1)Q = 0$ , και εφ' όσον  $w_n \neq 1$ , έχουμε

$$1 + w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1} = 0.$$

## Ρίζες του $a \in \mathbb{C}$

Εάν  $a = 0$ , τότε για κάθε  $n$ , η μοναδική  $n$ -οστή ρίζα του  $a$  είναι 0:

$$z^n = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Εάν  $a \neq 0$ , υποθέτουμε ότι  $a$  γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή ως  $a = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Ο πραγματικός αριθμός  $s$  είναι θετικός, και συμβολίζουμε  $s^{1/n}$  τη θετική πραγματική  $n$ -οστή ρίζα του  $s$ . Θέτουμε  $z_0 = s^{1/n}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$ , και παρατηρούμε ότι  $z_0^n = a$ , δηλαδή  $z_0$  είναι μία από τις  $n$ -οστές ρίζες του  $a$ .

Εάν  $z_k$  είναι μια άλλη  $n$ -οστή ρίζα του  $a$ , έχουμε  $\left(\frac{z_k}{z_0}\right)^n = 1$ , και συνεπώς  $\frac{z_k}{z_0}$  είναι μία  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας. Καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 3.4** Κάθε μιγαδικός αριθμός  $a \neq 0$ , έχει  $n$  διαφορετικές μιγαδικές  $n$ -οστές ρίζες, και εάν  $a = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  είναι μία τριγωνομετρική μορφή του  $a$ , οι  $n$ -οστές ρίζες είναι

$$z_k = s^{1/n} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Παρατηρούμε ότι εάν  $\omega_n$  είναι η πρωταρχική  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας, τότε οι  $n$ -οστές ρίζες του  $a$  είναι

$$z_k = |a|^{1/n} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} a}{n} \right) \omega_n^k,$$

για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Στο μιγαδικό επίπεδο όλες οι  $n$ -οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού  $a \neq 0$  βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα  $|a|^{1/n}$  και σχηματίζουν κανονικό  $n$ -γωνο, μία κορυφή του οποίου είναι ο μιγαδικός αριθμός  $|a|^{1/n} \left( \cos \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} a}{n} \right)$ .

**Δραστηριότητα 3.15** Στο μιγαδικό επίπεδο, σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας 2, και σημειώστε τις τρίτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού  $8\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$ .

Σημειώστε επίσης τις τέταρτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού  $-16$ . (Προσέξτε ότι μία τριγωνομετρική μορφή του  $-16$  είναι  $16(\cos \pi + i \sin \pi)$ .)

**Παράδειγμα 3.11** Θα υπολογίσουμε τις τρίτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού  $-4(\sqrt{3} - i)$ .

Πρώτα γράφουμε τον αριθμό στη μορφή  $-4(\sqrt{3} - i) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ , ώστε ο αριθμός στην παρένθεση να έχει μέτρο 1 και ο συντελεστής του να είναι θετικός. Κατόπιν βρίσκουμε  $\vartheta$  ώστε  $\cos \vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\sin \vartheta = \frac{1}{2}$ , δηλαδή  $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$  και

$$-4(\sqrt{3} - i) = 8 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

Τότε μία τρίτη ρίζα είναι

$$(-4(\sqrt{3} - i))^{\frac{1}{3}} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right),$$

ενώ οι άλλες δύο είναι, για γωνίες  $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}$  και  $\frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}$ ,

$$2 \left( \cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right), \quad \text{και} \quad 2 \left( \cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right).$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του μισού της γωνίας, για να υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού αριθμού συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους. Από τις ταυτότητες 3.2 και 3.3, έχουμε για το διπλάσιο της γωνίας

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta, \quad (3.9)$$

$$\sin 2\vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (3.10)$$

Από την 3.9 και την  $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$  έχουμε

$$\cos 2\vartheta = 2 \cos^2 \vartheta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \vartheta.$$

Εκφράζουμε τις τελευταίες σχέσεις ως προς  $\vartheta/2$  και έχουμε

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{2}}, \quad (3.11)$$

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}}. \quad (3.12)$$

Παρατηρήστε ότι  $\cos \frac{\vartheta}{2} \geq 0$  όταν  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , ενώ  $\cos \frac{\vartheta}{2} < 0$  όταν  $\pi < \vartheta < 2\pi$ .

**Παράδειγμα 3.12** Θα υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες του  $z = u + vi$  συναρτήσει των  $u$  και  $v$ . Για  $0 \leq \vartheta < 2\pi$  τέτοιο ώστε  $\cos \vartheta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$  και  $\sin \vartheta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$ , μία τετραγωνική

ρίζα του  $z$  είναι

$$\begin{aligned}
 (u + vi)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\sqrt{u^2 + v^2}} \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\
 &= |(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}}| \left( \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}} \right) \\
 &= |(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}}| \left( \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{2}} \right) \\
 &= |(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}}| \left( \pm \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} + u}{2\sqrt{u^2 + v^2}}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2\sqrt{u^2 + v^2}}} \right).
 \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στην έκφραση

$$(u + vi)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \pm \sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} + i \sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u} \right). \quad (3.13)$$

### Οι λύσεις της εξίσωσης $az^2 + bz + c = 0$ με μιγαδικούς συντελεστές

Οι λύσεις της εξίσωσης δευτέρου βαθμού με συντελεστές στο  $\mathbb{C}$  υπολογίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που υπολογίζονται οι λύσεις της εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές. Για να λύσουμε την εξίσωση  $az^2 + bz + c = 0$  συμπληρώνουμε το τετράγωνο,

$$a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

και έχουμε

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

συνεπώς

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}.$$

Εάν  $b^2 - 4ac = 0$ , η εξίσωση έχει μοναδική λύση  $z = \frac{-b}{2a}$ , η οποία είναι εν γένει μιγαδικός αριθμός. Πραγματικός αριθμός είναι μόνον όταν  $\text{Arg } a = \text{Arg } b$  ή  $|\text{Arg } a - \text{Arg } b| = \pi$ .

Εάν  $b^2 - 4ac = u + iv \neq 0$ , για  $u, v \in \mathbb{R}$ , από την 3.13,

$$(b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}} = (u + iv)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} + i \sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u} \right),$$

και η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μιγαδικές λύσεις.