

Διάλεξη 10

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν ϑ είναι οποιοδήποτε όρισμα ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z , παρατηρούμε ότι $\operatorname{Re} z = |z| \cos \vartheta$ και $\operatorname{Im} z = |z| \sin \vartheta$. Συνεπώς

$$z = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Ορισμός 3.2. Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$ είναι

$$z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

όπου $r > 0$ και $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.4 Εάν $z = -2 + 2i$, τότε $r = |z| = \sqrt{8}$ και

$$z = \sqrt{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right).$$

Ένα όρισμα του z είναι το $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$. Προσέξτε ότι ο συντελεστής του $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ πρέπει να είναι θετικός. Το πρόσημο του πραγματικού και του φανταστικού μέρους λαμβάνονται υπ' όψη στον προσδιορισμό του ορίσματος ϑ .

Παράδειγμα 3.5 Εάν $\vartheta = \frac{11}{6}\pi$ και $r = 2$, τότε

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.6 Εάν $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, τότε $\bar{z} = r(\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = r(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta))$.

Δραστηριότητα 3.9 Γράψτε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -2i, \quad 1+i, \quad -(1+i).$$

Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών ως ομοιοθεσία

Η τριγωνομετρική μορφή έκφρασης των μιγαδικών αριθμών μας επιτρέπει να περιγράψουμε τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών γεωμετρικά.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ και $w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, και υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= rs[(\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi) + i(\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi)] . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για το άθροισμα των γωνιών,

$$\cos(\vartheta + \varphi) = \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi , \quad (3.2)$$

$$\sin(\vartheta + \varphi) = \cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi \quad (3.3)$$

και έχουμε

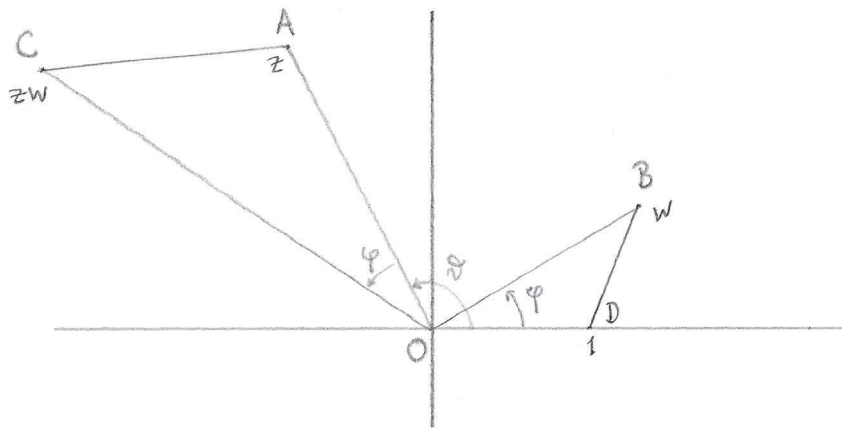
$$z = rs(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)) . \quad (3.4)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το γινόμενο των μέτρων των μιγαδικών αριθμών z και w είναι το μέτρο του γινομένου τους

$$|zw| = |z| |w| , \quad (3.5)$$

και το άθροισμα των ορισμάτων των μιγαδικών αριθμών z και w είναι ένα όρισμα του γινομένου τους,

$$\text{Arg}(zw) \equiv \text{Arg } z + \text{Arg } w . \quad (3.6)$$



Σχήμα 3.5: Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών

Στο Σχήμα 3.5, τα σημεία A, B, C, D αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z, w, zw και 1 αντίστοιχα. Από τις σχέσεις 3.6 και 3.5 συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ODB και OAC είναι όμοια. Ο πολλαπλασιασμός με το z στο μιγαδικό επίπεδο είναι μία **ομοιοθεσία**, δηλαδή ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο w του επιπέδου σε ένα σημείο w' τέτοιο ώστε το τρίγωνο που σχηματίζουν τα z και w' με το 0 , να είναι όμοιο με το τρίγωνο που

σχηματίζουν τα 1 και w με το 0. Με αυτή την έννοια, το zw είναι προς το z , όπως το w είναι προς το 1,

$$zw : z = w : 1.$$

όπου ως αναλογία δεν εννοούμε απλώς την ισότητα του λόγου των μηκών (όπως για ευθύγραμμα τμήματα στο ευκλείδειο επίπεδο) αλλά και την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών.

Με όρους διανυσμάτων, ο πολλαπλασιασμός με το z , στρέφει το διάνυσμα θέσης του w κατά γωνία $\text{Arg}(z)$, και το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό $|z|$.

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός με z τέτοιο ώστε $|z| = 1$, είναι απλώς στροφή του μιγαδικού επιπέδου κατά γωνία $\text{Arg}(z)$. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός με τη φανταστική μονάδα i , είναι περιστροφή κατά $\pi/2$. Όπως έχουμε παρατηρήσει, από αυτή την άποψη αποκτά γεωμετρικό νόημα η ιδιότητα $i^2 = -1$: η επανάληψη της περιστροφής κατά $\pi/2$ δίδει περιστροφή κατά γωνία π , η οποία απεικονίζει κάθε σημείο στο αντίθετο του:

$$i^2 w = -w.$$

Δραστηριότητα 3.10 Στο μιγαδικό επίπεδο σημειώστε το σημείο που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $w = 1 + i$. Σημειώστε επίσης έναν οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z με $\text{Re } z < 0$, και βρείτε σχεδιαστικά το σημείο που αντιστοιχεί στο γινόμενο zw .

Κάνετε το ίδιο για έναν αριθμό u με $\text{Im } u < 0$.

Δυνάμεις μιγαδικού αριθμού. Θεώρημα De Moivre

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$, υπολογίζεται εύκολα εάν ο z είναι σε τριγωνομετρική μορφή.

Έστω $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, και υποθέτουμε ότι ο αντίστροφος έχει τριγωνομετρική μορφή $z^{-1} = t(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= zw \\ &= rt(\cos(\vartheta + \varphi) + i(\vartheta + \varphi)), \end{aligned}$$

αλλά ο μιγαδικός αριθμός 1 έχει μέτρο 1 και όρισμα 0. Συνεπώς $rt = 1$ και $\vartheta + \varphi \equiv 0$, και καταλήγουμε

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)),$$

δηλαδή $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$, και $-\vartheta$ είναι ένα όρισμα του z^{-1} . Ειδικότερα, για το πρωτεύον όρισμα του z^{-1} έχουμε

$$\text{Arg } z^{-1} = \begin{cases} 2\pi - \text{Arg } z & \text{εάν } \text{Arg } z \neq 0, \\ 0 & \text{εάν } \text{Arg } z = 0. \end{cases}$$

Δραστηριότητα 3.11 Στο μιγαδικό επίπεδο σημειώστε τα σημεία που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ και $w = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$. Βρείτε σχεδιαστικά τα σημεία που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς $(-i)^{-1}$, $(2i)^{-1}$, z^{-1} , w^{-1} , $(2z)^{-1}$ και $(3w)^{-1}$.

Η τριγωνομετρική μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε τον αριθμό $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ και τις δυνάμεις του

$$\begin{aligned} z^2 &= r r (\cos(\vartheta + \vartheta) + i \sin(\vartheta + \vartheta)) \\ &= r^2 (\cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta)) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= r^2 r (\cos(2\vartheta + \vartheta) + i \sin(2\vartheta + \vartheta)) \\ &= r^3 (\cos(3\vartheta) + i \sin(3\vartheta)) \end{aligned}$$

και, όπως θα δείξουμε με επαγωγή στο n ,

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) .$$

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται Θεώρημα του De Moivre. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα στο z^{-1} , βλέπουμε ότι μπορεί να επεκταθεί και σε αρνητικούς ακέραιους. Εάν $n \in \mathbb{N}$,

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\vartheta) + i \sin(-n\vartheta)) .$$

Θεώρημα 3.3 (Θεώρημα De Moivre) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$, και κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, εάν $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, τότε

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

Θα δούμε αναλυτικά την απόδειξη του Θεωρήματος De Moivre ως ένα παράδειγμα απόδειξης με επαγωγή.

Απόδειξη. Θεωρούμε μιγαδικό αριθμό $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \neq 0$. Αρχικά θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει $z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$.

Εάν $n = 1$, το ζητούμενο είναι $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, το οποίο ισχύει από τα δεδομένα.

Τώρα θεωρούμε δεδομένο ότι για κάποιο k ισχύει $z^k = r^k (\cos(k\vartheta) + i \sin(k\vartheta))$ και θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει $z^{k+1} = r^{k+1} (\cos((k+1)\vartheta) + i \sin((k+1)\vartheta))$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z z^k \\ &= r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) r^k (\cos(k\vartheta) + i \sin(k\vartheta)) \\ &= r^{k+1} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (\cos(k\vartheta) + i \sin(k\vartheta)) \\ &= r^{k+1} ((\cos \vartheta \cos(k\vartheta) - \sin \vartheta \sin(k\vartheta)) + i(\cos \vartheta \sin(k\vartheta) + \sin \vartheta \cos(k\vartheta))) \\ &= r^{k+1} (\cos((k+1)\vartheta) + i \sin((k+1)\vartheta)) . \end{aligned}$$

Αφού το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, και αποδείξαμε ότι εάν ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό k τότε ισχύει και για τον επόμενο φυσικό αριθμό $k+1$, από το Αξίωμα της Επαγωγής, ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό.

Απομένει να δείξουμε ότι ισχύει για $n = 0$ και για $n < 0$.

Για $n = 0$, έχουμε $z^0 = 1$ και $r^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1$, άρα το ζητούμενο ισχύει.

Για $n < 0$, παρατηρούμε ότι $-n > 0$, άρα το ζητούμενο ισχύει για $-n$. Θεωρούμε το $z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))$, και έχουμε

$$\begin{aligned} z^n &= (z^{-1})^{-n} \\ &= (r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)))^{-n}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το ζητούμενο για το θετικό αριθμό $-n$,

$$\begin{aligned} (r^{-1}(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)))^{-n} &= r^n(\cos(-n(-\vartheta)) + i\sin(-n(-\vartheta))) \\ &= r^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)). \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Δραστηριότητα 3.12 Βρείτε σχεδιαστικά τις δυνάμεις z^2, z^3, z^4 για $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}$, και τις δυνάμεις $w^2, \dots, w^8$ για $w = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών μπορούμε να βρούμε ταυτότητες που συσχετίζουν τις δυνάμεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ϑ με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις των πολλαπλασίων του ϑ .

Παράδειγμα 3.7 Αναπτύγματα δυνάμεων των $\cos \vartheta, \sin \vartheta$.

Εάν $z = \cos \vartheta + i\sin \vartheta$, τότε $\frac{1}{z} = \cos \vartheta - i\sin \vartheta$ και

$$\begin{aligned} 2\cos \vartheta &= z + \frac{1}{z} \\ 2i\sin \vartheta &= z - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Από τους τύπους του De Moivre, $z^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$ και $z^{-n} = \cos n\vartheta - i\sin n\vartheta$. Άρα

$$2\cos n\vartheta = z^n + \frac{1}{z^n} \quad (3.7)$$

$$2i\sin n\vartheta = z^n - \frac{1}{z^n}. \quad (3.8)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την 3.7 και το ανάπτυγμα του διωνύμου $(z + \frac{1}{z})^6$ για να εκφράσουμε το $\cos^6 \vartheta$ σε συννημίτονα πολλαπλασίων της ϑ :

$$\begin{aligned} 2^6 \cos^6 \vartheta &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^6 \\ &= z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15\frac{1}{z^2} + 6\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} \\ &= \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20 \\ &= 2\cos 6\vartheta + 12\cos 4\vartheta + 30\cos 2\vartheta + 20 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε

$$\cos^6 \vartheta = \frac{1}{32} (\cos 6\vartheta + 6\cos 4\vartheta + 15\cos 2\vartheta + 10).$$

Ανάλογα υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}(2i)^5 \sin^5 \vartheta &= \left(z - \frac{1}{z}\right)^5 \\ &= \left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - 5 \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + 10 \left(z - \frac{1}{z}\right)\end{aligned}$$

και από την 3.8 έχουμε

$$2^5 \sin^5 \vartheta = 2(\sin 5\vartheta - 5 \sin 3\vartheta + 10 \sin \vartheta)$$

και

$$\sin^5 \vartheta = \frac{1}{16}(\sin 5\vartheta - 5 \sin 3\vartheta + 10 \sin \vartheta).$$

Παράδειγμα 3.8 Αναπτύγματα των $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$ σε δυνάμεις.

Από το Θεώρημα De Moivre, $\cos n\vartheta$ είναι το πραγματικό μέρος του $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n$, ενώ $\sin n\vartheta$ είναι το φανταστικό μέρος του $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του διωνύμου $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^6$ για να υπολογίσουμε τα $\cos 6\vartheta$ και $\sin 6\vartheta$ σε δυνάμεις των $\cos \vartheta$ και $\sin \vartheta$,

$$\begin{aligned}(\cos 6\vartheta + i \sin 6\vartheta) &= (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^6 \\ &= \cos^6 \vartheta + 6i \cos^5 \vartheta \sin \vartheta + 15i^2 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 20i^3 \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta + 15i^4 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta \\ &\quad + 6i^5 \cos \vartheta \sin^5 \vartheta + i^6 \sin^6 \vartheta.\end{aligned}$$

Χωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, έχουμε

$$\cos 6\vartheta = \cos^6 \vartheta - 15 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta + 15 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta - \sin^6 \vartheta$$

και

$$\sin 6\vartheta = 6 \cos^5 \vartheta \sin \vartheta - 20 \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta + 6 \cos \vartheta \sin^5 \vartheta.$$