

Διάλεξη 9

Ρίζες αρνητικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει πάντα πραγματικός αριθμός που να ικανοποιεί μία εξίσωση δευτέρου βαθμού. Για παράδειγμα, για την εξίσωση $x^2 - 2x + 3 = 0$, ο τύπος των ριζών δίδει $x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1}$, που δεν είναι ίσο με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι -1 .

Κάτι πιο παράξενο συμβαίνει με εξισώσεις 3ου βαθμού. Τον 16ο αιώνα ανακαλύφθηκε διαδικασία λύσης αυτής της εξίσωσης, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις οδηγεί σε εκφράσεις με τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Το παράξενο εδώ είναι ότι εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια ποσότητα της οποίας το τετράγωνο είναι -1 , και συνεχίσουμε τις πράξεις, καταλήγουμε σε πραγματικό αριθμό που αποτελεί ρίζα της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, εάν εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην εξίσωση $x^3 - 15x - 4 = 0$, φτάνουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Εάν τώρα εφαρμόσουμε την ταυτότητα $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ και τις ιδιότητες των πράξεων, έχουμε

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 6 + 12\sqrt{-1} - 1\sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

και παρόμοια

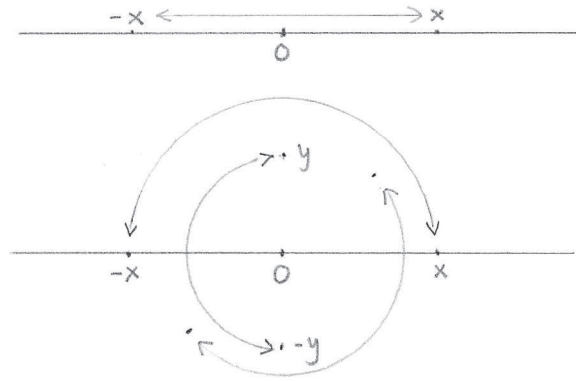
$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

Άρα $x = (2 + 11\sqrt{-1}) + (2 - 11\sqrt{-1}) = 4$, που είναι πράγματι ρίζα της εξίσωσης! Από τέτοια παραδείγματα φάνηκε για πρώτη φορά να έχει χρησιμότητα η έννοια της τετραγωνικής ρίζας ενός αρνητικού αριθμού, αρκεί να μπορέσουμε να δώσουμε συγκεκριμένο νόημα σε αυτήν.

Σε αυτό το μάθημα δεν θα ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, που πήρε σχεδόν τρεις αιώνες μέχρι να γίνει αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά θα τη δούμε γεωμετρικά, από μία σύγχρονη σκοπιά.

Η ποσότητα $\sqrt{-1}$ παριστάνει κάτι που όταν το επαναλάβεις δύο φορές δίδει -1 . Ο πολλαπλασιασμός με -1 στην ευθεία των πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί στη συμμετρία γύρω από το 0, που απεικονίζει κάθε αριθμό στον αντίθετό του, $x \mapsto -x$. Πώς είναι δυνατόν να προκύψει αυτή η συμμετρία στην ευθεία ως επανάληψη μίας διαδικασίας δύο φορές; Εάν παραμείνουμε στην ευθεία αυτό δεν είναι δυνατό. Εάν όμως θεωρήσουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών σαν μία ευθεία μέσα σε ένα επίπεδο, τότε η συμμετρία $x \mapsto -x$ στην

ευθεία προκύπτει από την περιστροφή του επιπέδου γύρω από το 0 κατά γωνία π . Αυτήν τη περιστροφή μπορούμε να την αντιληφθούμε ως επανάληψη μίας διαδικασίας δύο φορές: είναι δύο φορές η περιστροφή γύρω από το 0 κατά γωνία $\pi/2$!



Σχήμα 3.1: Η συμμετρία $x \mapsto -x$ στην ευθεία και στο επίπεδο

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να αναζητήσουμε το νόημα της $\sqrt{-1}$ όχι στην ευθεία αλλά στο επίπεδο: πολλαπλασιασμός με $\sqrt{-1}$ είναι η περιστροφή του επιπέδου γύρω από το 0 κατά γωνία $\pi/2$. Όταν το επαναλάβουμε δύο φορές η ευθεία των πραγματικών βρίσκεται στη συμμετρική θέση, που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό με -1 .

Εάν τώρα θεωρήσουμε το επίπεδο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, μπορούμε να ταυτίσουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών με τον άξονα Ox , αντιστοιχώντας το $a \in \mathbb{R}$ στο σημείο $(a, 0)$, και τον “αριθμό” $\sqrt{-1}$ στο σημείο $(0, 1)$, έτσι ώστε η περιστροφή κατά γωνία $\pi/2$ να στέλνει το 1 στο $\sqrt{-1}$. Στη συνέχεια μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή την αντιστοιχία σε κάθε σημείο του επιπέδου, θεωρώντας ότι

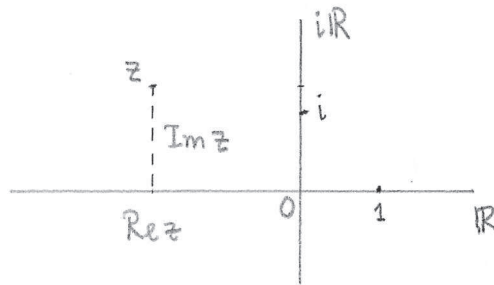
$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{-1}.$$

Θέλουμε να εξετάσουμε εάν μπορούμε να ορίσουμε πράξεις με αυτές τις εκφράσεις, που να έχουν ιδιότητες ανάλογες με τις πράξεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με την προσθήκη του κανόνα $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$.

Για συντομία, συμβολίζουμε το $\sqrt{-1}$ με i , και τον “αριθμό” που αντιστοιχεί στο σημείο (a, b) του επιπέδου με $a + bi$. Το σύνολο αυτών των “αριθμών” το συμβολίζουμε $\mathbb{C}$.

Ορισμός 3.1. Το σύνολο $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Εάν $z = a + bi$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός,

- ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται $\operatorname{Re} z = a$.
- ο πραγματικός αριθμός b ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται $\operatorname{Im} z = b$.



Σχήμα 3.2: Το επίπεδο των μιγαδικών αριθμών

Δραστηριότητα 3.1 Γράψτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών αριθμών

$$3 + 3i, \quad 5, \quad 2i.$$

Προσέξτε ότι το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι πραγματικός αριθμός.

Το υποσύνολο $\{a + 0i : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ το ταυτίζουμε με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και το ονομάζουμε **πραγματικό άξονα** στο $\mathbb{C}$. Το υποσύνολο $\{0 + bi : b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ το ονομάζουμε **φανταστικό άξονα** στο $\mathbb{C}$ και μπορούμε να το συμβολίζουμε $i\mathbb{R}$. Τα στοιχεία του τα ονομάζουμε **φανταστικούς αριθμούς**.

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε πρόσθεση ώστε να συμφωνεί με την πρόσθεση διανυσμάτων του επιπέδου,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Για να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό θεωρούμε ότι ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, ώστε

$$(a + bi)(c + di) = ac + a(di) + (bi)c + (bi)(di).$$

Θεωρώντας ότι ισχύουν επίσης η προσεταιριστική και η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών με το i , έχουμε

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Δραστηριότητα 3.2 Υπολογίστε, δηλαδή γράψτε στη μορφή $a + bi$, τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{ll}\alpha'. & (3 + 2i) - (i + 5) \\ \gamma'. & (2 + i) + (2 - i) \\ \epsilon'. & (2 + \sqrt{3}i)^2\end{array}\quad \begin{array}{ll}\beta'. & (3 + 2i)(i + 5) \\ \delta'. & (2 + i)(2 - i) \\ \zeta'. & (2 + \sqrt{3}i)^3\end{array}$$

Σημειώνουμε το γινόμενο

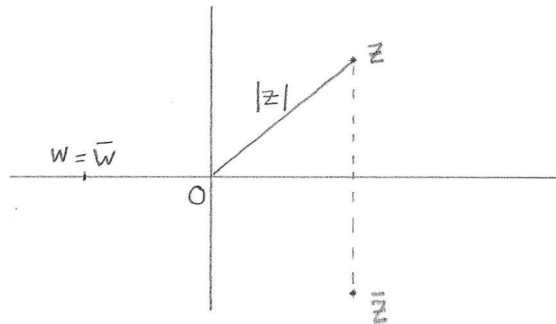
$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

το οποίο είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $a + bi$ και $a - bi$ είναι **συζυγείς** μιγαδικοί αριθμοί. Το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ το συμβολίζουμε $\bar{z} = a - bi$. Παρατηρούμε ότι $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$.

Δραστηριότητα 3.3 Βρείτε τους μιγαδικούς συζυγείς των μιγαδικών αριθμών

$$3, \quad 2i, \quad 1 - 3i.$$

Δραστηριότητα 3.4 Δείξτε ότι $\bar{\bar{z}} = z$ εάν και μόνον εάν $\operatorname{Im} z = 0$.



Σχήμα 3.3: Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

Στους μιγαδικούς αριθμούς ισχύει η ιδιότητα διαγραφής: εάν $w \neq 0$ και $zw = uw$ τότε $z = u$.

Χρησιμοποιούμε το συζυγή ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z και την ιδιότητα διαγραφής, για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο $\frac{1}{z}$, δηλαδή να τον φέρουμε στη μορφή $p + qi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Δραστηριότητα 3.5 Υπολογίστε το πηλίκο $\frac{c+di}{a+bi}$, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγή $a - bi$.

Δραστηριότητα 3.6 Υπολογίστε, δηλαδή γράψτε στη μορφή $a + bi$, τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & (3 + 2i) - \overline{(i + 5)} \\ \gamma'. & \frac{2+i}{2-i} \\ \epsilon'. & (2 + \sqrt{3}i)^{-2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \beta'. & \overline{(3 + 2i)}(i + 5) \\ \delta'. & (2 + \sqrt{3}i)^{-1} \\ \varsigma'. & \frac{1-i}{3+4i} \end{array}$$

Πρόταση 3.1 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w , και τους συζυγείς αριθμούς $\bar{z}$ και $\bar{w}$.

α' . Στο μιγαδικό επίπεδο οι αριθμοί z και $\bar{z}$ αντιστοιχούν σε σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β' .

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

γ' .

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

δ' .

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{\bar{w}}.$$

ϵ' .

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

ς' .

$$\overline{(\bar{z})} = z.$$

ζ' .

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

Αυτές οι ιδιότητες αποδεικνύονται αντικαθιστώντας $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ και $w = c + di$, $\bar{w} = c - di$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \overline{z\bar{w}} &= \overline{(a + bi)(c + di)} \\ &= \overline{ac - bd + adi + bci} \\ &= ac - bd - adi - bci, \end{aligned}$$

και

$$\bar{z}\bar{\bar{w}} = (a - bi)(c - di)$$

$$= ac - bd - adi - bci.$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού με το συζυγή του είναι το τετράγωνο του μέτρου του αντίστοιχου διανύσματος (a, b) :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Τον αριθμό $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ τον συμβολίζουμε $|z|$ και τον ονομάζουμε **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z . Το μέτρο του z είναι η απόσταση του z από το 0.

Παράδειγμα 3.1 Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = -1 + i$ είναι $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Δραστηριότητα 3.7 Υπολογίστε το μέτρο των μιγαδικών αριθμών

$$-2, \quad 3i, \quad 1 + i, \quad 2 - i.$$

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του μιγαδικού επιπέδου z και w είναι $d(z, w) = |z - w|$. Πράγματι, εάν $z = a + bi$ και $w = c + di$, $|z - w| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$.

Πρόταση 3.2 Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w . Το μέτρο μιγαδικών αριθμών έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\alpha'. \quad |z| = |\bar{z}| = |-z|,$$

$$\beta'. \quad |zw| = |z||w|,$$

$$\gamma'. \quad ||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Η τρίτη είναι η τριγωνική ανισότητα στο επίπεδο: οι μιγαδικοί αριθμοί 0, z και $z + w$ αποτελούν τις κορυφές ενός τριγώνου με μήκη πλευρών $|z|$, $|w|$ και $|z + w|$, και σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

Παράδειγμα 3.2 Η εξίσωση $|z - z_0| = r$ ικανοποιείται από τους μιγαδικούς αριθμούς που απέχουν σταθερή απόσταση r από τον z_0 . Η εξίσωση παριστάνει έναν κύκλο με κέντρο z_0 και ακτίνα r .

Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ ικανοποιείται από τους μιγαδικούς αριθμούς που απέχουν ίση απόσταση από τον z_1 και τον z_2 . Η εξίσωση παριστάνει τη μεσοκάθετο των σημείων z_1 και z_2 .

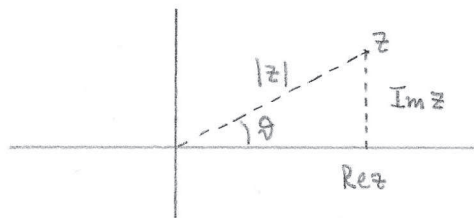
Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Για ένα μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$, οι πραγματικοί αριθμοί $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ και $|z|$ αποτελούν τα μήκη πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Συνεπώς υπάρχει πραγματικός αριθμός ϑ τέτοιος ώστε

$$\cos \vartheta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \vartheta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \quad (3.1)$$

Οποιοσδήποτε αριθμός με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z . Προφανώς, εάν ϑ είναι ένα όρισμα του z , τότε $\vartheta + 2k\pi$ είναι επίσης όρισμα του z , για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\vartheta \equiv \varphi$ για να δηλώσουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί ϑ και φ διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 2π . Διακρίνουμε το **πρωτεύον** όρισμα, το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες $0 \leq \vartheta < 2\pi$ και το συμβολίζουμε $\operatorname{Arg} z$.

Γεωμετρικά, ϑ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία από το 0 που περνάει από το z , με τη θετική ημιευθεία του πραγματικού άξονα, Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Εάν ϑ είναι όρισμα του μιγαδικού αριθμού z , τότε $-\vartheta$ είναι ένα όρισμα του συζυγούς $\bar{z}$, αφού

$$\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} \bar{z}}{|\bar{z}|}, \quad \sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta = -\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Im} \bar{z}}{|\bar{z}|}.$$

Παράδειγμα 3.3 Για να βρούμε το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z = 1 - \sqrt{3}i$, παρατηρούμε ότι $|z|^2 = 1 + 3$, άρα $|z| = 2$. Συνεπώς $\cos \vartheta = \frac{1}{2}$ και $\sin \vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα ένα όρισμα του z είναι $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$, ενώ το πρωτεύον όρισμα είναι $\operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{3}$.

Δραστηριότητα 3.8 Υπολογίστε το πρωτεύον όρισμα των μιγαδικών αριθμών

$$1, \quad i, \quad -i, \quad -1, \quad 1+i, \quad -(1+i), \quad \sqrt{3}+i.$$