

Διάλεξη 8

Δύο δυϊκές διαδικασίες: Γεωμετρικός μετασχηματισμός και αλλαγή συστήματος αναφοράς

Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι μία απεικόνιση $\varphi : E^2 \rightarrow E^2$ που διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του επιπέδου, δηλαδή για κάθε $P, Q \in E^2$,

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q).$$

Θα μελετήσουμε πώς εκφράζονται μέσω των συντεταγμένων των σημείων διάφοροι ευκλείδαιοι μετασχηματισμοί. Εάν (x, y) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου Q , και (x', y') οι συντεταγμένες του σημείου $\varphi(Q)$, θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση που εκφράζει τον ευκλείδειο μετασχηματισμό φ ως προς τις συντεταγμένες, δηλαδή τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία

$$\varphi(x, y) = (x', y').$$

Εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της οποίας γεωμετρικός τόπος είναι η εικόνα του G από το μετασχηματισμό φ , δηλαδή το σχήμα $\varphi(G)$. Το σημείο με συντεταγμένες $(x', y') = \varphi(x, y)$ ανήκει στο σχήμα $\varphi(G)$ εάν και μόνον εάν το σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = \varphi^{-1}(x', y')$ ικανοποιεί την εξίσωση $f(x, y) = 0$. Συνεπώς το (x', y') πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $f \circ \varphi^{-1}(x', y') = 0$. Θα δούμε τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνει αυτή η εξίσωση σε απλά σχήματα.

Η επιλογή του σημείου αναφοράς και των αξόνων στο ευκλείδειο επίπεδο μπορεί να γίνει αυθαίρετα. Κάθε επιλογή καθορίζει διαφορετικές συντεταγμένες για κάθε σημείο και διαφορετικές αναλυτικές εξισώσεις για γεωμετρικά αντικείμενα. Στη μελέτη ενός προβλήματος η επιλογή του κατάλληλου συστήματος αναφοράς μπορεί να απλοποιήσει πολύ τους υπολογισμούς. Θα εξετάσουμε πώς αλλάζουν οι συντεταγμένες ενός σημείου ή οι εξισώσεις ευθειών και άλλων γεωμετρικών αντικειμένων όταν αλλάζει η επιλογή ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς.

Θεωρούμε το ευκλείδειο επίπεδο στο οποίο έχουμε επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(P, \vec{m}, \vec{n})$. Υποθέτουμε ότι ένα σημείο X έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και συντεταγμένες (u, v) ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{m}, \vec{n})$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{PX} = u\vec{m} + v\vec{n}.$$

Αρχικά θέλουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των (x, y) και των (u, v) .

Συμβολίζουμε (p, q) τις συντεταγμένες του σημείου P ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, δηλαδή $\overrightarrow{OP} = p\vec{i} + q\vec{j}$. Αφού

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX},$$

παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των (x, y) και των (u, v) :

$$(x - p)\vec{i} + (y - q)\vec{j} = u\vec{m} + v\vec{n}. \quad (2.11)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία δυϊκότητα μεταξύ ενός μετασχηματισμού, που μετακινεί τα σχήματα χωρίς να αλλάζει το σύστημα αναφοράς, και μίας αλλαγής του συστήματος αναφοράς, όπου τα σχήματα του επιπέδου παραμένουν σταθερά, αλλά αλλάζουν οι εξισώσεις που τα περιγράφουν. Θα δούμε ότι αυτή η δυϊκότητα εμφανίζεται με συγκεκριμένο τρόπο στους υπολογισμούς.

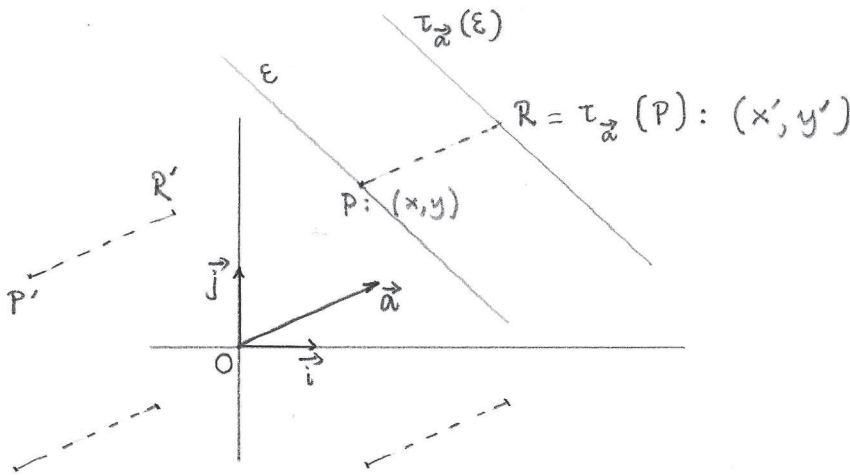
Ευκλείδεια μεταφορά

Μία **μεταφορά** είναι ένας ευκλείδειος μετασχηματισμός $\tau_{\vec{a}} : E^2 \rightarrow E^2$ που μετατοπίζει κάθε σημείο του επιπέδου κατά ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$: για κάθε σημείο P , $\tau_{\vec{a}}(P)$ είναι το σημείο R για το οποίο

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \vec{a}.$$

Εάν $\vec{a} = (s, t)$ και $P : (x, y)$, τότε $\tau_{\vec{a}}(P)$ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(x + s, y + t)$. Συνεπώς σε συντεταγμένες η απεικόνιση γράφεται

$$\tau_{\vec{a}}(x, y) = (x + s, y + t).$$



Σχήμα 2.16: Μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$.

Εάν ε είναι μία ευθεία στο επίπεδο, με εξίσωση

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.12)$$

θέλουμε να υπολογίσουμε την εξίσωση της ευθείας $\tau_{\vec{a}}(\varepsilon)$. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων $\tau_{\vec{a}}(x, y)$ όταν (x, y) ανήκουν στο

γεωμετρικό τόπο της εξίσωσης $Ax + By + C = 0$. Συμβολίζουμε (x', y') τις συντεταγμένες του σημείου $\tau_a(x, y)$, δηλαδή $(x', y') = (x + s, y + t)$, και συνεπώς

$$x = x' - s, \quad y = y' - t.$$

Αντικαθιστούμε στην 2.12, και έχουμε

$$A(x' - s) + B(y' - t) + C = 0.$$

Γράφουμε αυτή την εξίσωση σε κανονική μορφή,

$$Ax' + By' + C - As - Bt = 0. \quad (2.13)$$

Καταλήγουμε ότι η εικόνα της ευθείας ε από το μετασχηματισμό τ_a είναι η ευθεία στο επίπεδο με εξίσωση 2.13.

Γενικότερα, εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, τότε $\tau_a(G)$ είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x' - s, y' - t) = 0$.

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε την ευθεία ε , με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$. Θα βρούμε την εξίσωση της εικόνας της ευθείας ε από τη μεταφορά

$$\tau(x, y) = (x', y') = (x + 2, y - 1).$$

Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $\tau^{-1}(x', y') = (x' - 2, y' + 1)$.

Τα σημεία της εικόνας $\tau(\varepsilon)$ ικανοποιούν την εξίσωση $2(x' - 2) + (y' + 1) - 1 = 0$, δηλαδή

$$2x' + y' - 4 = 0.$$

2.0.1 Μεταφορά του σημείου αναφοράς

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την αλλαγή συστήματος αναφοράς. Στο Ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς με διαφορετικό σημείο αναφοράς αλλά παράλληλους και ομόρροπους άξονες: $(O, \vec{i}, \vec{j})$ και $(P, \vec{i}, \vec{j})$. Σε αυτήν την περίπτωση η 2.11 γίνεται

$$(x - p)\vec{i} + (y - q)\vec{j} = u\vec{i} + v\vec{j},$$

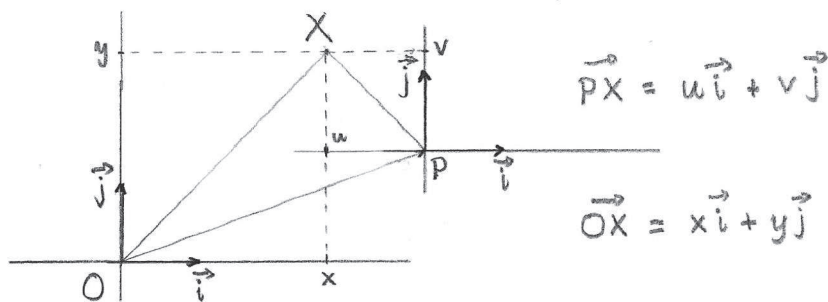
και συνεπώς

$$x = u + p \quad \text{και} \quad y = v + q. \quad (2.14)$$

Θεωρούμε τώρα μία ευθεία ε με εξίσωση 2.12 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ίδιας ευθείας ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Αντικαθιστώντας τις 2.14 στην εξίσωση της ευθείας 2.12 έχουμε την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες ενός σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ για να βρίσκεται το σημείο στην ευθεία ε :

$$A(u + p) + B(v + q) + C = 0.$$



Σχήμα 2.17: Αλλαγή σημείου αναφοράς.

Καταλήγουμε ότι η εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(P, \vec{i}, \vec{j})$ σε κανονική μορφή είναι

$$Au + Bv + C + Ap + Bq = 0.$$

Γενικότερα, εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, τότε η εξίσωση του G ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ είναι $f(u + p, v + q) = 0$.

Παράδειγμα 2.4 Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε του Παραδείγματος 2.3 ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$, όπου P είναι το σημείο που προκύπτει από τη μεταφορά του O κατά $(-2, 1)$. Αφού P είναι το σημείο $(-2, 1)$, οι συντεταγμένες ως προς τα δύο συστήματα ικανοποιούν τις σχέσεις $x = u - 2$, $y = v + 1$, και η εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ θα είναι $2(u - 2) + (v + 1) - 1 = 0$, δηλαδή

$$2u + v - 4 = 0.$$

Δραστηριότητα 2.18 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\varphi(x, y) = (x - 1, y)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$, όπου $P : (-1, 1)$.

Περιστροφή

Το επόμενο είδος γεωμετρικού μετασχηματισμού που θα εξετάσουμε είναι η περιστροφή γύρω από το σημείο αναφοράς O .

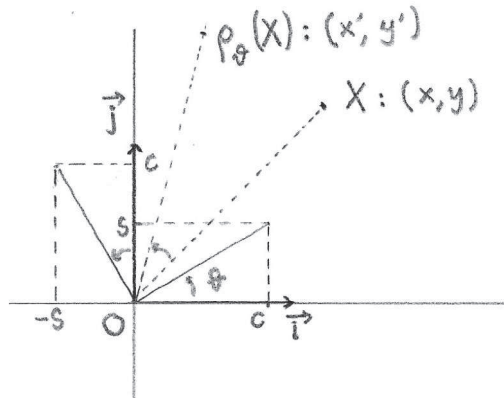
Η περιστροφή κατά (προσημασμένη) γωνία ϑ γύρω από το σημείο αναφοράς O είναι ο ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός $\rho_\vartheta : E^2 \rightarrow E^2$ που αφήνει το σημείο O σταθερό

και περιστρέφει κάθε άλλο σημείο του επιπέδου γύρω από το O κατά σταθερή γωνία ϑ . Ειδικότερα, η ρ_ϑ απεικονίζει το σημείο $(1, 0)$ στο $(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ και το σημείο $(0, 1)$ στο $(-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$, Σχήμα 2.18. Το γενικό σημείο $X : (x, y)$ απεικονίζεται στο $\rho_\vartheta(X) : (x', y')$, το οποίο υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό πινάκων

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

δηλαδή

$$\rho_\vartheta(x, y) = (x', y') = (x \cos \vartheta - y \sin \vartheta, x \sin \vartheta + y \cos \vartheta).$$



Σχήμα 2.18: Περιστροφή κατά γωνία ϑ γύρω από το σημείο αναφοράς O .

Γεωμετρικά είναι προφανές ότι η αντίστροφη απεικόνιση της περιστροφής κατά γωνία ϑ είναι η περιστροφή κατά την αντίθετη γωνία, $-\vartheta$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ και $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$, έχουμε και την αντίστροφη σχέση,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Θεωρούμε την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας $\rho_\vartheta(\varepsilon)$ χρησιμοποιούμε την 2.16 για να αντικαταστήσουμε τα x, y συναρτήσει των x', y' ,

$$A(x' \cos \vartheta + y' \sin \vartheta) + B(-x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta) + C = 0.$$

Καταλήγουμε ότι η εξίσωση της ευθείας $\rho_\vartheta(\varepsilon)$ σε κανονική μορφή είναι $A'x' + B'y' + C' = 0$, όπου οι συντελεστές A', B', C' δίδονται από

$$A' = A \cos \vartheta - B \sin \vartheta, \quad B' = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta \quad \text{και} \quad C' = C.$$

Παράδειγμα 2.5 Θα βρούμε την εξίσωση της εικόνας της ευθείας ζ με εξίσωση $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$, από την περιστροφή κατά γωνία $\pi/6$. Έχουμε $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\sin \pi/6 = 1/2$,

συνεπώς

$$\rho_{\pi/6}(x, y) = (x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2}, \frac{x + \sqrt{3}y}{2} \right).$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία ζ έχει κλίση $-\sqrt{3}/3 = \tan(-\pi/6)$, δηλαδή σχηματίζει γωνία $\pi/6$ με τον άξονα $y = 0$.

Η αντίστροφη απεικόνιση, που δίδει τα x, y συναρτήσει των x', y' , είναι η περιστροφή κατά γωνία $-\pi/6$,

$$(x, y) = \rho_{\pi/6}^{-1}(x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}, \frac{-x' + \sqrt{3}y'}{2} \right).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ε έχουμε $\frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} + \sqrt{3}\frac{-x' + \sqrt{3}y'}{2} - \sqrt{3} = 0$, δηλαδή

$$2y' - \sqrt{3} = 0.$$

Άρα η εικόνα $\rho_{\pi/6}(\zeta)$ είναι η ευθεία $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\rho_{\pi/6}(\zeta)$ έχει κλίση 0, δηλαδή είναι παράλληλη προς τον άξονα $y = 0$.

2.0.2 Περιστροφή του συστήματος αναφοράς

Επιστρέφοντας στην αλλαγή συστήματος αναφοράς, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς παραμένει σταθερό, $P = O$, και οι άξονες περιστρέφονται κατά γωνία ϑ ,

$$\vec{m} = \cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j} \quad \vec{n} = -\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j}.$$

Σε αυτή την περίπτωση $\overrightarrow{OP} = 0$, και η σχέση 2.11 που συνδέει τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου X ως προς το $(O, \vec{i}, \vec{j})$ με τις συντεταγμένες (u, v) του σημείου X ως προς το $(O, \vec{m}, \vec{n})$ γίνεται

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= u\vec{m} + v\vec{n} \\ &= u(\cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}) + v(-\sin \vartheta \vec{i} + \cos \vartheta \vec{j}) \\ &= (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \vec{i} + (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \vec{j}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$x = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta, \quad y = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta$$

και αντίστροφα

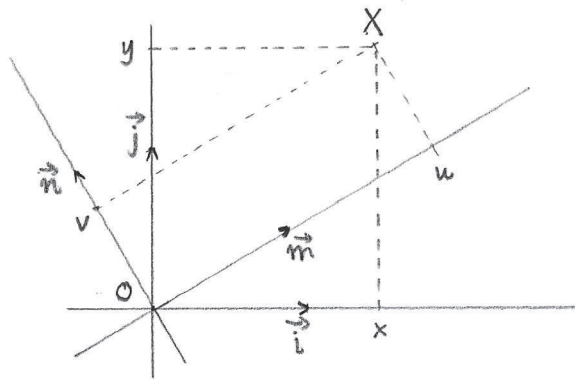
$$u = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad v = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.$$

Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon : Ax + By + C = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, αντικαθιστούμε τις x, y συναρτήσει των u, v :

$$A(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) + B(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) + C = 0.$$

Σε κανονική μορφή η εξίσωση είναι

$$(A \cos \vartheta + B \sin \vartheta)u + (-A \sin \vartheta + B \cos \vartheta)v + C = 0.$$



Σχήμα 2.19: Περιστροφή των αξόνων του συστήματος αναφοράς.

Παράδειγμα 2.6 Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ζ του Παραδείγματος 2.5 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, όπου τα διανύσματα $\vec{m}$ και $\vec{n}$ προκύπτουν από τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, με περιστροφή κατά $-\pi/6$,

$$\vec{m} = \frac{\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}}{2}.$$

Τότε από την 2.11 έχουμε

$$x\vec{i} + y\vec{j} = u\frac{\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}}{2} + v\frac{\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}}{2},$$

δηλαδή

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v, \quad y = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ζ έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) - \sqrt{3} = 0,$$

δηλαδή

$$2v - \sqrt{3} = 0.$$

Δραστηριότητα 2.19 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\chi(x, y) = (y, -x)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, όπου $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = \vec{i}$.

Δραστηριότητα 2.20 Επαληθεύστε ότι οι πίνακες $\begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$ είναι ο ένας αντίστροφος του άλλου.

Γενικοί μετασχηματισμοί

Ο γενικός ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου είναι σύνθεση μεταφορών και περιστροφών εάν διατηρεί τον προσανατολισμό, δηλαδή εάν διατηρεί το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων. Εάν αντιστρέφει τον προσανατολισμό, δηλαδή αλλάζει το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων, τότε είναι σύνθεση μεταφορών, περιστροφών και της ανάκλασης $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Πρόταση 2.10 Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου $\varphi : E^2 \rightarrow E^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό γράφεται στη μορφή

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

όπου $(s, t) = \varphi(0, 0)$, $(a, b) = \varphi(1, 0) - \varphi(0, 0)$ και $(-b, a) = \varphi(0, 1) - \varphi(0, 0)$.

Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου $\psi : E^2 \rightarrow E^2$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό γράφεται στη μορφή

$$\psi(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

όπου $(s, t) = \psi(0, 0)$, $(-a, b) = \psi(1, 0) - \psi(0, 0)$ και $(b, a) = \psi(0, 1) - \psi(0, 0)$.

Δραστηριότητα 2.21 Επαληθεύστε ότι ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, με $a^2 + b^2 = 1$, είναι ο εαυτός του.

Δραστηριότητα 2.22 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\rho(x, y) = (-y, -x)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, όπου $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = -\vec{i}$.

Δραστηριότητα 2.23 Η ευθεία ζ έχει εξίσωση $x + y = 1$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

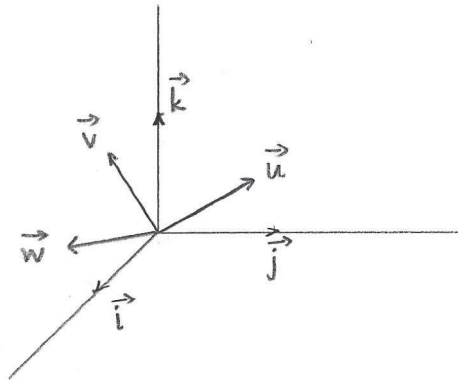
α'. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ζ από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\psi(x, y) = (-y + 1, -x)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v})$, όπου $P : (0, 1)$, $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = -\vec{i}$.

Αλλαγή συστήματος αναφοράς στο χώρο

Θεωρούμε δύο **ορθοκανονικά** συστήματα αναφοράς στο χώρο, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, και θέλουμε να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου ως προς τα δύο διαφορετικά συστήματα.

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς των δύο συστημάτων είναι το ίδιο. Έχουμε λοιπόν τα συστήματα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, Σχήμα 2.20



Σχήμα 2.20: Συστήματα αναφοράς στο χώρο

Εάν X είναι σημείο του χώρου, με συντεταγμένες (x, y, z) ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, το διάνυσμα θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.17)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (x', y', z') του X ως προς το σύστημα $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, οι οποίες δίδονται από τη σχέση

$$\overrightarrow{OX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}. \quad (2.18)$$

Για να πετύχουμε αυτό, χρειάζεται να εκφράσουμε τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Έστω

$$\vec{i} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}$$

$$\begin{aligned}\vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w} \\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Τότε αντικαθιστώντας τις 2.19 στην 2.17 έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= x(a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}) \\ &\quad + y(a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}) \\ &\quad + z(a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}) \\ &= (xa_1 + ya_2 + za_3)\vec{u} \\ &\quad + (xb_1 + yb_2 + zb_3)\vec{v} \\ &\quad + (xc_1 + yc_2 + zc_3)\vec{w}\end{aligned}$$

και συγκρίνοντας με την 2.18 έχουμε

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + a_2y + a_3z \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z\end{aligned}\quad (2.20)$$

Μπορούμε να παραστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το συμβολισμό πινάκων,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ο οποίος σημαίνει ότι ο αριθμός στην πρώτη γραμμή στην αριστερή πλευρά είναι ίσος με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα, με τα αντίστοιχα στοιχεία του διανύσματος συντεταγμένων, και ανάλογα για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή.

Δραστηριότητα 2.24 Θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ και $\vec{w} = \vec{k}$.

α'. Υπολογίστε τους συντελεστές a_n, b_n, c_n της 2.19 και εκφράστε τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ συναρτήσει των $\vec{u}, \vec{v}$ και $\vec{w}$.

β'. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ του σημείου X που έχει συντεταγμένες $(1, 1, 1)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα σημεία αναφοράς των δύο συστημάτων είναι διαφορετικά. Υποθέτουμε ότι τα δύο συστήματα είναι $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ και ότι

$$\overrightarrow{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k},$$

δηλαδή οι συντεταγμένες του P ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι (x_0, y_0, z_0) . Τότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\ &= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}.\end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες (x', y', z') του σημείου X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, για τις οποίες

$$\overrightarrow{PX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w},$$

δίδονται από τις σχέσεις

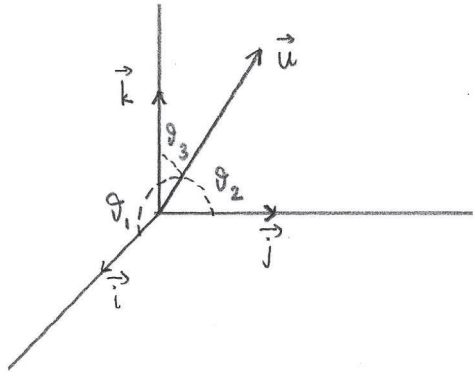
$$\begin{aligned}x' &= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) \\ y' &= b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) \\ z' &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Δραστηριότητα 2.25 Για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ της Δραστηριότητας 2.24, το σημείο $P : (1, 0, 0)$ και το σημείο $X : (1, 1, 1)$,

α'. Βρείτε τις συντεταγμένες του X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

β'. Βρείτε τις συντεταγμένες του X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Απομένει να εξετάσουμε πως εκφράζουμε τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Συνήθως γνωρίζουμε την αντίστροφη σχέση, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Σχήμα 2.21: Συνημίτονα διεύθυνσης ενός διανύσματος

Ας εξετάσουμε πρώτα ένα διάνυσμα, έστω το $\vec{u}$. Οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{u}$ με τα τρία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Αλλά, εφόσον τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{u}$ είναι μοναδιαία, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{i}$ είναι απλώς το συνημίτονο της γωνίας ϑ_1 μεταξύ του $\vec{u}$ και του $\vec{i}$, και αντίστοιχα για τα $\vec{u} \cdot \vec{j}$, $\vec{u} \cdot \vec{k}$ και τις γωνίες ϑ_2 , ϑ_3 μεταξύ του $\vec{u}$ και των $\vec{j}$, $\vec{k}$ αντίστοιχα:

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = \cos \vartheta_1 \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = \cos \vartheta_2 \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos \vartheta_3 \quad (2.22)$$

Συγκρίνοντας την 2.22 με την 2.19, βλέπουμε ότι

$$a_1 = \vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{i} = \cos \vartheta_1$$

και ανάλογα, $a_2 = \cos \vartheta_2$, $a_3 = \cos \vartheta_3$. Δηλαδή έχουμε

$$\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Οι συντεταγμένες (a_1, a_2, a_3) ονομάζονται **συνημίτονα διεύθυνσης** του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Παρόμοια βρίσκουμε ότι

$$\vec{v} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k},$$

όπου $b_1 = \cos \varphi_1$, $b_2 = \cos \varphi_2$, $b_3 = \cos \varphi_3$ είναι τα συνημίτονα των γωνιών φ_1 , φ_2 , φ_3 μεταξύ του $\vec{v}$ και των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ αντίστοιχα.

Τέλος

$$\vec{w} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}$$

για $c_1 = \cos \psi_1$, $c_2 = \cos \psi_2$, $c_3 = \cos \psi_3$ για τις γωνίες μεταξύ του $\vec{w}$ και των $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Ανακεφαλαιώνουμε : Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, και ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, τα διανύσματα του οποίου δίδονται ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{u} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \\ \vec{v} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \\ \vec{w} &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}, \end{aligned}$$

τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε παραστατικά στον ακόλουθο πίνακα

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	a_1	a_2	a_3
$\vec{v}$	b_1	b_2	b_3
$\vec{w}$	c_1	c_2	c_3

ο οποίος ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** από το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ στο σύστημα $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι συντεταγμένες του σημείου P ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι (x_0, y_0, z_0) .

Εάν το σημείο X έχει συντεταγμένες (x, y, z) ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ τότε οι συντεταγμένες (x', y', z') του X ως προς το σύστημα $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ δίδονται από τις σχέσεις

$$x' = a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0)$$

$$y' = b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0)$$

$$z' = c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0)$$