

Διάλεξη 7

Παραμετρική και αναλυτική περιγραφή ευθείας στο χώρο

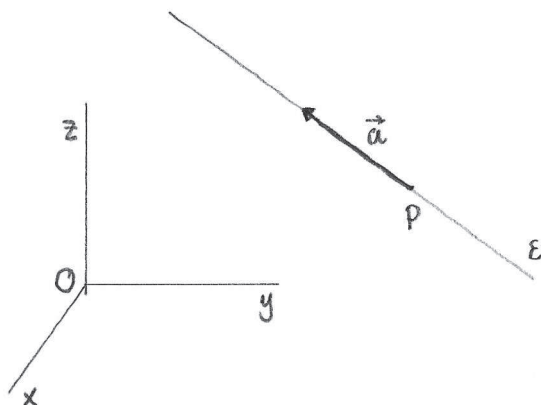
Μία ευθεία ε στο χώρο E^3 προσδιορίζεται αναλυτικά από δύο εξισώσεις, ως η τομή δύο επιπέδων. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε παραμετρικά μία ευθεία στο χώρο E^3 εάν γνωρίζουμε δύο σημεία P και Q πάνω στην ε , ή ένα σημείο P πάνω στην ε και ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο προς την ε .

Θεωρούμε ένα σημείο $P : (x_1, y_1, z_1)$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = (u, v, w)$. Εάν X είναι το γενικό σημείο στην ευθεία που περνάει από το P και έχει διεύθυνση παράλληλη προς το $\vec{a}$, τότε $\overrightarrow{PX} = s\vec{a}$ και η παραμετρική περιγραφή του διανύσματος θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\vec{a}. \quad (2.7)$$

Από την 2.7 έχουμε τρεις παραμετρικές σχέσεις για τις συντεταγμένες του X ,

$$x = x_1 + su, \quad y = y_1 + sv, \quad z = z_1 + sw.$$



Σχήμα 2.12: Η ευθεία στο χώρο.

Αφού $\vec{a} \neq 0$, τουλάχιστον ένα από τα u, v, w δεν είναι μηδέν. Σε κάθε περίπτωση απαλείφοντας το s από τις τρεις παραμετρικές σχέσεις, βρίσκουμε δύο εξισώσεις. Για παράδειγμα, εάν $u \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} v(x - x_1) &= u(y - y_1), \\ w(x - x_1) &= u(z - z_1), \end{aligned}$$

δηλαδή ένα σύστημα δύο εξισώσεων, που παριστάνει την ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.

Δραστηριότητα 2.13 Βρείτε το σύστημα δύο εξισώσεων που περιγράφει ως τομή δύο επιπέδων την ευθεία που περνάει από το σημείο $P : (1, -3, 1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (0, 1, -2)$.

Γενικότερα, θεωρούμε το σύστημα δύο εξισώσεων

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο, και οι λύσεις του συστήματος δίδουν τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στην τομή των δύο επιπέδων.

- Εάν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$(A_1, B_1, C_1) = \mu(A_2, B_2, C_2) \quad \text{και} \quad D_1 = \mu D_2,$$

οι δύο εξισώσεις ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια σημεία, δηλαδή τα επίπεδα συμπίπτουν.

- Εάν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$(A_1, B_1, C_1) = \mu(A_2, B_2, C_2) \quad \text{αλλά} \quad D_1 \neq \mu D_2,$$

τότε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα: είναι και τα δύο κάθετα στο διάνυσμα (A_1, B_1, C_1) και δεν υπάρχουν κοινά σημεία.

- Εάν τα διανύσματα (A_1, B_1, C_1) και (A_2, B_2, C_2) δεν είναι παράλληλα, τότε ούτε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα, και τέμνονται σε μία ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση τουλάχιστον ένα από τα $A_1B_2 - B_1A_2$, $A_1C_2 - C_1A_2$, $B_1C_2 - C_1B_2$ δεν είναι μηδέν.

Για να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα δύο επίπεδα, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Δραστηριότητα 2.14 Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα με εξισώσεις $y + z - 1 = 0$ και $y + 2z - 1 = 0$, λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων (στο $\mathbb{R}^3$!).

Για έναν εναλλακτικό τρόπο να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας είναι κάθετο στα (A_1, B_1, C_1) και (A_2, B_2, C_2) , άρα είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$. Άρα η παραμετρική παράσταση της ευθείας είναι

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2),$$

όπου (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σημείο της ευθείας. Για παράδειγμα, εάν $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$, μπορούμε να θέσουμε $z_0 = 0$ και να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 &= -D_1 \\ A_2x_0 + B_2y_0 &= -D_2 \end{aligned}$$

για να βρούμε το σημείο $(x_0, y_0, 0)$,

$$x_0 = \frac{-(D_1 B_2 - B_1 D_2)}{A_1 B_2 - B_1 A_2}, \quad y_0 = \frac{-(A_1 D_2 - D_1 A_2)}{A_1 B_2 - B_1 A_2}.$$

Δραστηριότητα 2.15 Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα με εξισώσεις $y + z - 1 = 0$ και $y + 2z - 1 = 0$, χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων συντελεστών.

Απόσταση σημείου από ευθεία

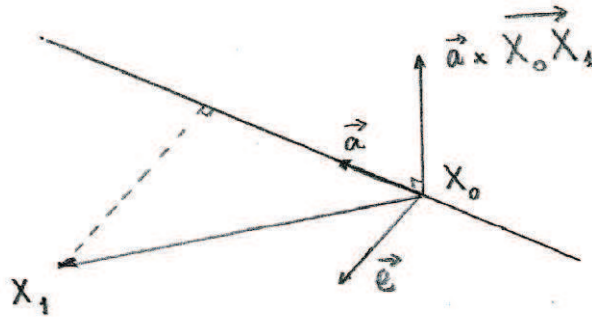
Θεωρούμε μία ευθεία ε και ένα σημείο X_1 στο E^3 . Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου X_1 από την ευθεία ε . Μία ευθεία στο χώρο δεν έχει μοναδική κάθετη διεύθυνση. Πρώτα θα βρούμε το επίπεδο που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο X_1 , ώστε να προσδιορίσουμε την διεύθυνση σε αυτό το επίπεδο που είναι κάθετη προς την ευθεία.

Έστω ότι η ευθεία ε έχει παραμετρική περιγραφή $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX_0} + t\vec{a}$ με $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{a} = (u, v, w)$, και το σημείο X_1 έχει συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) .

Τότε το διάνυσμα $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο X_1 , και το διάνυσμα

$$\vec{e} = (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}) \times \vec{a}$$

είναι παράλληλο προς αυτό το επίπεδο και κάθετο στην ευθεία ε .



Σχήμα 2.13: Κάθετος από σημείο προς ευθεία στο χώρο.

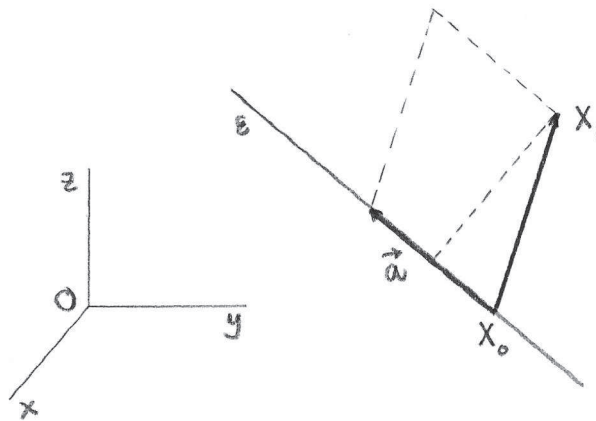
Συμπεραίνουμε ότι η απόσταση του X_1 από την ευθεία είναι το μέτρο της προβολής του $\overrightarrow{X_0 X_1}$ πάνω στο $\vec{e}$:

$$\begin{aligned} d(X_1, \varepsilon) &= |\text{pr}_{\vec{e}} \overrightarrow{X_0 X_1}| = \left| \frac{\vec{e} \cdot \overrightarrow{X_0 X_1}}{|\vec{e}|} \right| \\ &= \frac{|((\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}) \times \vec{a}) \cdot \overrightarrow{X_0 X_1}|}{|(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0 X_1}) \times \vec{a}|}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη θέση των πράξεων στο μικτό γινόμενο, δηλαδή έχουμε $((\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \times \vec{a}) \cdot \overrightarrow{X_0X_1} = (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \cdot (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})$. Παρατηρούμε ότι $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}$, και συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων, $|(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \times \vec{a}| = |(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})| |\vec{a}|$. Άρα

$$\begin{aligned} d(X_1, \varepsilon) &= \frac{|(\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \cdot (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1})|}{|\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}| |\vec{a}|} \\ &= \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}|}{|\vec{a}|}. \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα έχει μία ενδιαφέρουσα ερμηνεία. $|\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}|$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με μία πλευρά το διάνυσμα $\vec{a}$ πάνω στην ευθεία ε , και άλλη πλευρά το διάνυσμα $\overrightarrow{X_0X_1}$ από το σημείο X_0 πάνω στην ευθεία ε στο σημείο X_1 , Σχέδιο 2.14. Όταν διαιρέσουμε αυτό το εμβαδόν με το μήκος της πλευράς $\vec{a}$, παίρνουμε το ύψος του παραλληλογράμμου, δηλαδή την κάθετη απόσταση από το σημείο X_1 στην ευθεία ε .



Σχήμα 2.14: Η απόσταση σημείου από ευθεία στο χώρο.

Δραστηριότητα 2.16 Η ευθεία ε περνάει από το σημείο $P : (2, 2, 2)$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Βρείτε το κάθετο διάνυσμα από το σημείο αναφοράς O στην ευθεία ε , καθώς και την απόσταση από το O στην ε .

Ασύμβατες ευθείες

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 στο χώρο E^3 : η ε_1 περνάει από το σημείο X_1 και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}_1$, ενώ η ε_2 περνάει από το σημείο X_2 και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}_2$. Η παραμετρική έκφραση για το γενικό σημείο των δύο ευθειών είναι

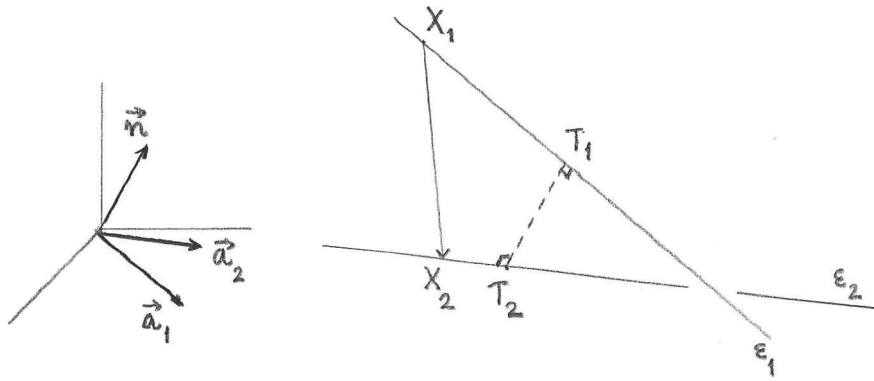
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_1} + t\vec{a}_1 & t \in \mathbb{R}, \\ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_2} + s\vec{a}_2 & s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Εάν οι ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{X_1X_2}$, $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ είναι συνεπίεδα και

$$[\overrightarrow{X_1X_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0.$$

Στην αντίθετη περίπτωση οι ευθείες ονομάζονται **ασύμβατες**. Ασύμβατες ευθείες έχουν μοναδική κοινή κάθετο ευθεία κ . Το διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{n}$ της κ είναι κάθετο στο $\vec{a}_1$ και το $\vec{a}_2$, και μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2.$$



Σχήμα 2.15: Η κοινή κάθετος ασύμβατων ευθειών στο χώρο.

Η ελάχιστη απόσταση των δύο ευθειών είναι το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_1X_2}$, από ένα σημείο της μίας ευθείας σε ένα σημείο της άλλης, πάνω στο διάνυσμα $\vec{n}$ στη διεύθυνση της κοινής καθέτου:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= |\text{pr}_{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2} \overrightarrow{X_1X_2}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \\ &= \frac{|[\overrightarrow{X_1X_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}. \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε τα σημεία τομής T_1 και T_2 της κοινής καθέτου κ με τις ε_1 και ε_2 , εργαζόμαστε ως εξής: Το σημείο T_1 ανήκει στην ε_1 , άρα υπάρχει t για το οποίο

$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OX_1} + t \vec{a}_1 \quad (2.8)$$

και παρόμοια για το T_2 και την ε_2 , υπάρχει s για το οποίο

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OX_2} + s \vec{a}_2. \quad (2.9)$$

Επίσης $\overrightarrow{T_1T_2}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, και άρα

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \ell \vec{a}_1 \times \vec{a}_2. \quad (2.10)$$

Αφού $\overrightarrow{T_1 T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1}$, από τις 2.8, 2.9 και 2.10 έχουμε

$$\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_1} + s \vec{a}_2 - t \vec{a}_1 = \ell \vec{a}_1 \times \vec{a}_2,$$

το οποίο είναι ένα σύστημα 3 εξισώσεων (μία για κάθε συντεταγμένη) με 3 αγνώστους s , t και ℓ , το οποίο μπορούμε να λύσουμε για να προσδιορίσουμε τα t , s και εν συνεχεία τα T_1 , T_2 .

Παράδειγμα 2.2 Δίδονται ευθείες ε_1 και ε_2 τέτοιες ώστε η ε_1 περνά από το σημείο $A : (2, -1, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 3, -1)$, και η ε_2 περνά από το σημείο $B : (0, 1, 3)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

Αφού τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, υπάρχει μοναδική κοινή βκάθετος, με διάνυσμα διεύθυνσης

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, -3, -5).$$

Υπολογίζουμε το μικτό γινόμενο

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = (-2, 2, 3) \cdot (4, -3, -5) = -29.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες είναι ασύμβατες.

Το διάνυσμα $\vec{u} \times \vec{v}$ έχει μέτρο $|\vec{u} \times \vec{v}| = 5\sqrt{2}$.

Συνεπώς η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών είναι

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|-29|}{5\sqrt{2}} = \frac{29\sqrt{2}}{10}.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο ευθειών με την κοινή κάθετο, χρησιμοποιούμε το σύστημα

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + s \vec{v} - t \vec{u} = \ell (\vec{u} \times \vec{v}),$$

δηλαδή

$$(-2, 2, 3) + s(2, 1, 1) - t(1, 3, -1) = \ell(4, -3, -5),$$

ή

$$\begin{aligned} 2s - t - 4\ell &= 2 \\ s - 3t + 3\ell &= -2 \\ s + t + 5\ell &= -3 \end{aligned},$$

το οποίο λύνουμε για να προσδιορίσουμε τα s και t :

$$t = \frac{1}{25}, \quad s = -\frac{7}{50}.$$

Άρα τα σημεία τομής με την κοινή κάθετο είναι

$$\begin{aligned} T_1 &= (2, -1, 0) + \frac{1}{25}(1, 3, -1), \\ T_2 &= (0, 1, 3) - \frac{7}{50}(2, 1, 1). \end{aligned}$$

Η κοινή κάθετος κ έχει παραμετρική έκφραση

$$\overrightarrow{OX} = (2, -1, 0) + \frac{1}{25}(1, 3, -1) + \ell(4, -3, -5).$$

Επαληθεύουμε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών,

$$|T_1 - T_2| = \frac{1}{50}|(116, -87, -145)| = \frac{29\sqrt{2}}{10}.$$

Δραστηριότητα 2.17 Η ευθεία ε περνάει από το σημείο $P : (2, 2, 2)$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Βρείτε την απόσταση από τον άξονα Ox στην ε .