

Διάλεξη 6

Σύστημα αναφοράς στο χώρο

Στο χώρο E^3 θεωρούμε ένα σημείο O , και τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ προσδιορίζουν τρεις άξονες, $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$, $(\zeta, \vec{w})$, οι οποίοι τέμνονται στο O . Η διατεταγμένη τριάδα αξόνων $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$, $(\zeta, \vec{w})$ ονομάζεται **σύστημα αναφοράς** στο χώρο και θα το συμβολίζουμε $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Από την Πρόταση 2.1, οποιοδήποτε διάνυσμα στο χώρο $\vec{z}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Ορισμός 2.6. Οι αριθμοί της διατεταγμένης τριάδας (a, b, c) ονομάζονται **συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$** ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Τα διανύσματα $a\vec{u}$, $b\vec{v}$, $c\vec{w}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Για κάθε σημείο D του χώρου, το διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του D , και οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OD}$ είναι οι **συντεταγμένες του σημείου D** .

Δραστηριότητα 2.4 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $OABC$, με πλευρά μήκους 1, τα διανύσματα $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$, και θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{u}$ με συντεταγμένες $(1, 1, 1)$ και το διάνυσμα $\vec{w}$ με συντεταγμένες $(1, 1, -1)$.

Θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε **ορθοκανονικά, δεξιόστροφα** συστήματα συντεταγμένων.

Ορισμός 2.7. Ένα **ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ έχουν μέτρο 1, είναι κάθετα μεταξύ τους, και η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων.

Δραστηριότητα 2.5 Σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Συνήθως σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{j}$ και $\vec{k}$ στο επίπεδο του χαρτιού, και φανταζόμαστε το διάνυσμα $\vec{i}$ να βγαίνει έξω από το χαρτί. Σημειώστε το σημείο με συντεταγμένες $(1, 2, 1)$ και το διάνυσμα με συντεταγμένες $(0, -2, 1)$.

Πρόταση 2.3 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$ δίδονται από τα εσωτερικά γινόμενα του $\vec{z}$ με τα διανύσματα του συστήματος:

$$\vec{z} = (\vec{z} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{z} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{z} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίδεται από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων. Εάν $\vec{z} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$ και $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, τότε

$$\vec{z} \cdot \vec{y} = z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3$$

και

$$|\vec{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Δραστηριότητα 2.6 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε

α'. Τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{u} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

β'. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

γ'. Την απόσταση του σημείου A από το σημείο B .

δ'. Τις συντεταγμένες του μέσου M του διαστήματος AB , και την απόσταση του M από το σημείο αναφοράς O .

Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ως προς ένα ορθοκανονικό, δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Πρόταση 2.4 Εάν τα διανύσματα $\vec{z}$ και $\vec{y}$ έχουν συντεταγμένες (z_1, z_2, z_3) και (y_1, y_2, y_3) αντίστοιχα, ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, τότε

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2y_3 - z_3y_2)\vec{i} + (z_3y_1 - z_1y_3)\vec{j} + (z_1y_2 - z_2y_1)\vec{k}. \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Εάν $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ορθοκανονικό και δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς, το παραλληλόγραμμο που προσδιορίζουν τα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι ορθογώνιο, με εμβαδόν 1, και ισχύει η σχέση

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$$

Ανάλογα έχουμε

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$$

και

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου, την οποία

θα αποδείξουμε στην Πρόταση 2.7 χωρίς τη χρήση συντεταγμένων, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \vec{z} \times \vec{y} &= (z_1 \vec{i} + z_2 \vec{j} + z_3 \vec{k}) \times (y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}) \\
 &= z_1 y_1 \vec{i} \times \vec{i} + z_1 y_2 \vec{i} \times \vec{j} + z_1 y_3 \vec{i} \times \vec{k} \\
 &\quad + z_2 y_1 \vec{j} \times \vec{i} + z_2 y_2 \vec{j} \times \vec{j} + z_2 y_3 \vec{j} \times \vec{k} \\
 &\quad + z_3 y_1 \vec{k} \times \vec{i} + z_3 y_2 \vec{k} \times \vec{j} + z_3 y_3 \vec{k} \times \vec{k} \\
 &= z_1 y_1 \vec{0} + z_1 y_2 \vec{k} - z_1 y_3 \vec{j} \\
 &\quad - z_2 y_1 \vec{k} + z_2 y_2 \vec{0} + z_2 y_3 \vec{i} \\
 &\quad + z_3 y_1 \vec{j} - z_3 y_2 \vec{i} + z_3 y_3 \vec{0},
 \end{aligned}$$

όπου συμβολίζουμε $\vec{0}$ το μηδενικό διάνυσμα. Καταλήγουμε στην

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2 y_3 - z_3 y_2) \vec{i} + (z_3 y_1 - z_1 y_3) \vec{j} + (z_1 y_2 - z_2 y_1) \vec{k}.$$

□

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου, διευκολύνει ο συμβολισμός των 3×3 ορίζουσών: Εάν $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ και c_1, c_2, c_3 είναι 9 ποσότητες, για τις οποίες ορίζονται πράξεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1. \quad (2.2)$$

Τις ορίζουσες θα μελετήσουμε διεξοδικά στη Γραμμική Άλγεβρα. Ειδικά για να υπολογίσουμε 3×3 ορίζουσες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σχήμα: Ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες γραμμές ως τέταρτη και πέμπτη γραμμή, και υπολογίζουμε τα αθροίσματα των γινομένων κατά μήκος των διαγωνίων, με $+$ για τις διαγώνιες από τα αριστερά προς τα δεξιά, και με $-$ για τις διαγώνιες από τα δεξιά προς τα αριστερά

$$\begin{array}{ccc}
 + & & - \\
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 + & \searrow & \swarrow - \\
 b_1 & b_2 & b_3 \\
 + & \swarrow \searrow & \swarrow \searrow - \\
 c_1 & c_2 & c_3 \\
 & \swarrow \searrow & \swarrow \searrow \\
 a_1 & a_2 & a_3 \\
 & \swarrow \searrow & \swarrow \searrow \\
 b_1 & b_2 & b_3
 \end{array} = +a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

Στην περίπτωση του εξωτερικού γινομένου $\vec{z} \times \vec{y}$, υπολογίζουμε την ορίζουσα με πρώτη γραμμή τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, και τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{z}$ και $\vec{y}$ στη δεύτερη και

την τρίτη γραμμή αντίστοιχα. Κάθε όρος αυτής της ορίζουσας είναι ένα από τα διανύσματα του συστήματος αναφοράς πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό. Συγκρίνοντας την 2.1 με την 2.2, έχουμε

$$\vec{z} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Δραστηριότητα 2.7 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε

α'. Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u} \times \vec{w}$.

β'. Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περνάει από το σημείο αναφοράς και τα σημεία A και B .

γ'. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

Μικτό γινόμενο

Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{x} = \vec{OA}$, $\vec{y} = \vec{OB}$ και $\vec{z} = \vec{OC}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και εξετάζουμε το εσωτερικό γινόμενο του εξωτερικού γινομένου των $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ με το διάνυσμα $\vec{OC}$. Θα δούμε ότι $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ είναι ένας αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

Πράγματι, το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ είναι

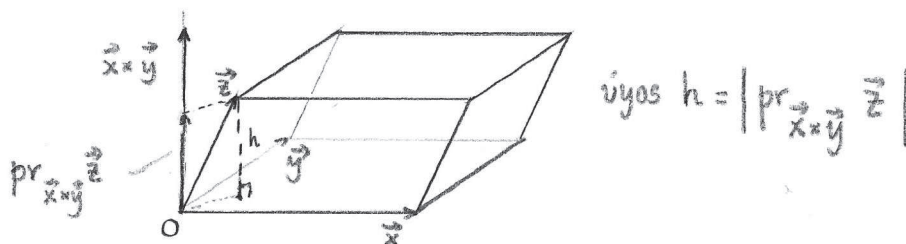
$$|\vec{OA} \times \vec{OB}| \left(\text{pr}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \vec{OC} \right).$$

Το διάνυσμα $\vec{OA} \times \vec{OB}$ έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$. Το μέτρο της προβολής του $\vec{OC}$ στο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου $OADB$ είναι το ύψος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. Άρα η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου,

$$|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}| = |\vec{OA} \times \vec{OB}| \left| \text{pr}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \vec{OC} \right|,$$

είναι ακριβώς το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπιπέδου επί το ύψος του, δηλαδή ο όγκος του παραλληλεπιπέδου, Σχήμα 2.8.

Εάν η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, τότε ο αριθμός $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ είναι θετικός, δες Άσκηση 3.4, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικός.



Σχήμα 2.8: Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Ορισμός 2.8. Το **μικτό γινόμενο** τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι ο αριθμός

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

Συγκεντρώνουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις σε μία Πρόταση.

Πρόταση 2.5 Εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Το μικτό γινόμενο είναι θετικό εάν το σύστημα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο και αρνητικό εάν το $(-\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο.

Το μικτό γινόμενο είναι μηδέν εάν και μόνον εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι συνεπίπεδα.

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή του γινομένου $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ είναι ίση με την απόλυτη τιμή του γινομένου $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, αφού και οι δύο είναι ίσες με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{x}$. Στην Άσκηση 3.5 έχουμε δείξει ότι $(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα ακριβώς όταν $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα. Συμπεραίνουμε ότι τα μικτά γινόμενα $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ και $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Καταλήγουμε ότι

$$(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

Συνδυάζοντας με την αντιμεταθετική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε επίσης

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}),$$

δηλαδή, στον ορισμό του μικτού γινομένου μπορούμε να εναλλάξουμε το εξωτερικό και το εσωτερικό γινόμενο. Συνοψίζουμε αυτές και άλλες ιδιότητες του μικτού γινομένου στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.6 Το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\alpha'. [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}),$$

$$\beta'. [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] = [\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}],$$

$$\gamma'. -[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}] = [\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}].$$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα για το εξωτερικό γινόμενο:

Πρόταση 2.7 Εάν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι διανύσματα στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{b} = \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} \times \vec{y} - \vec{x} \times \vec{z}.$$

Θα δείξουμε ότι $|\vec{b}| = 0$, και συνεπώς ότι $\vec{b} = 0$. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα για το εσωτερικό γινόμενο και την Πρόταση 2.6.α' έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot (\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} \times \vec{y} - \vec{x} \times \vec{z}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{b} \cdot \vec{x} \times \vec{y} - \vec{b} \cdot \vec{x} \times \vec{z} \\ &= (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot (\vec{y} + \vec{z}) - (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} - (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot \vec{z} \\ &= (\vec{b} \times \vec{x}) \cdot ((\vec{y} + \vec{z}) - \vec{y} - \vec{z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μικτό γινόμενο χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς,

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) &= (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) \cdot \\ &\quad \cdot [(y_2z_3 - y_3z_2)\vec{i} + (y_3z_1 - y_1z_3)\vec{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{k}] \\ &= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 2.8 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε το μικτό γινόμενο $[\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}]$.

Δις εξωτερικό γινόμενο

Το γινόμενο $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ είναι κάθετο προς το $\vec{y} \times \vec{z}$, και συνεπώς βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{y}, \vec{z}$. Ο ακόλουθος υπολογισμός εκφράζει το $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{y}$ και

$\vec{z}$.

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2 z_3 - y_3 z_2 & y_3 z_1 - y_1 z_3 & y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}(x_2(y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_3(y_3 z_1 - y_1 z_3)) \\
 &\quad + \vec{j}(x_3(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1)) \\
 &\quad + \vec{k}(x_1(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_2(y_2 z_3 - y_3 z_2)) \\
 &= \vec{i}(y_1(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_1(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)) \\
 &\quad + \vec{j}(y_2(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)) \\
 &\quad + \vec{k}(y_3(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_3(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)) \\
 &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}.
 \end{aligned}$$

Πρόταση 2.8 Εάν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι διανύσματα στο χώρο E^3 , το δις εξωτερικό γινόμενο δίδεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}, \\
 (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}.
 \end{aligned}$$

Επίπεδα στο χώρο

Στο χώρο E^3 επιλέγουμε ένα δεξιόστροφο, ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ένα επίπεδο στο χώρο E^3 προσδιορίζεται εάν γνωρίζουμε 3 σημεία του που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ή εάν γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Παράδειγμα 2.1 Θεωρούμε τα σημεία $P : (1, 0, 1)$, $Q : (1, 1, 0)$, $R : (0, 1, 1)$. Εάν $X : (x, y, z)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου που περνάει από τα τρία σημεία, υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

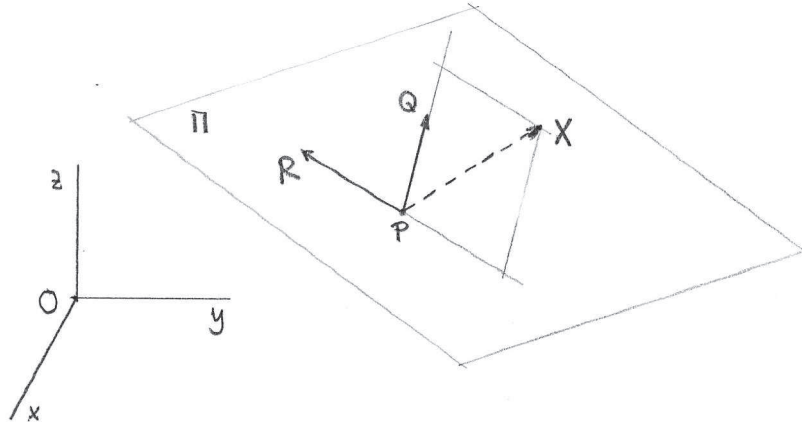
$$\overrightarrow{PX} = (x - 1, y, z - 1), \quad \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0),$$

και βρίσκουμε τις παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του σημείου X ,

$$x = 1 - t, \quad y = s + t, \quad z = 1 - s.$$

Αντικαθιστώντας τα $t = 1 - x$ και $s = 1 - z$ στην $y = s + t$ έχουμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου

$$x + y + z = 2.$$

Σχήμα 2.9: Το επίπεδο που προσδιορίζεται από τα σημεία P , Q και R .

Γενικά, θεωρούμε τρία σημεία $P : (x_1, y_1, z_1)$, $Q : (x_2, y_2, z_2)$ και $R(x_3, y_3, z_3)$ που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά. Εάν $X : (x, y, z)$ είναι το γενικό σημείο του επιπέδου Π που περνάει από τα τρία σημεία, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ γράφεται ως γραμμικός σύνδυασμος των $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}. \quad (2.3)$$

Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του γενικού σημείου X του επιπέδου:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR},$$

και αφού $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OX} = (1 - s - t)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OR}.$$

Δραστηριότητα 2.9 Γράψτε τις προηγούμενες σχέσεις σε συντεταγμένες.

Από την εξίσωση 2.3 έχουμε τρεις παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του X :

$$x - x_1 = s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1),$$

$$y - y_1 = s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1),$$

$$z - z_1 = s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1).$$

Από αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε τα s και t , για να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες (x, y, z) του γενικού σημείου του επιπέδου Π . Αφού $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά, τουλάχιστον ένα από τα $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$, $z_3 - z_1$ δεν είναι μηδέν. Εάν $x_3 - x_1 \neq 0$, επιλέγουμε την πρώτη εξίσωση και λύνουμε ως προς t ,

$$t = \frac{(x - x_1) - s(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Επίσης, αφού $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά, οι λόγοι $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_1)$, $(y_2 - y_1) : (y_3 - y_1)$ και $(z_2 - z_1) : (z_3 - z_1)$ δεν είναι όλοι ίσοι. Συνεπώς τουλάχιστον ένα από τα $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$ και $(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)$ δεν είναι μηδέν. Εάν $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \neq (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$, αντικαθιστούμε το t στην εξίσωση $y - y_1 = s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)$ και λύνουμε ως προς s ,

$$s = \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}.$$

Αντικαθιστούμε το t και μετά το x στην $z - z_1 = s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} z - z_1 &= \frac{(z_2 - z_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(z_3 - z_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}(x - x_1) + \\ &+ \frac{(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}(y - y_1). \end{aligned}$$

Για να γράψουμε την εξίσωση σε πιο σύντομη μορφή, θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) \\ B &= (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) \\ C &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

και τελικά έχουμε την εξίσωση

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (2.4)$$

Δραστηριότητα 2.10 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P : (1, 1, 1)$, $Q : (2, 1, 2)$ και $R : (0, 2, 1)$.

Ένας συντομότερος τρόπος να βρούμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P , Q και R βασίζεται στο εξωτερικό γινόμενο: Τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ βρίσκονται στο επίπεδο Π , άρα το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο Π . Το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$, που εφάπτεται στο επίπεδο, είναι κάθετο στο εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Συνεπώς το μικτό γινόμενο μηδενίζεται,

$$\overrightarrow{PX} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

και καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση 2.4.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Δραστηριότητα 2.11 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P : (1, 1, 1)$, $Q : (2, 1, 2)$ και $R : (0, 2, 1)$ χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο $\vec{PQ} \times \vec{PR}$.

Εάν στην εξίσωση 2.4 θέσουμε $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$, έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.5)$$

Ο άλλος τρόπος να προσδιορίσουμε ένα επίπεδο στο χώρο είναι να γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου, $P(x_1, y_1, z_1)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο, $\vec{n}$ με συντεταγμένες (k, ℓ, m) . τότε εάν $X(x, y, z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, το διάνυσμα $\vec{PX}$ είναι κάθετο στο $\vec{n}$ και συνεπώς

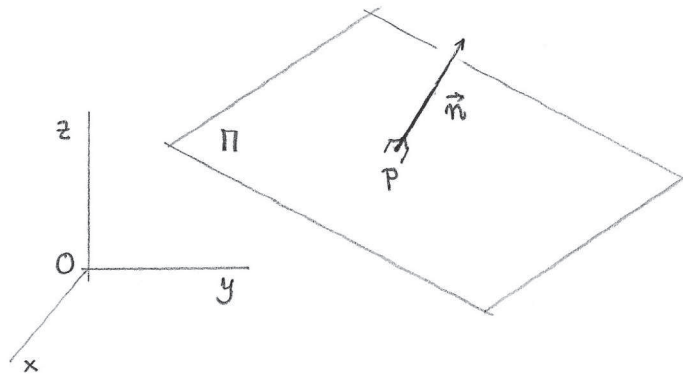
$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0,$$

ή

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (k, \ell, m) = 0,$$

δηλαδή

$$kx + \ell y + mz - (kx_1 + \ell y_1 + mz_1) = 0.$$



Σχήμα 2.10: Το επίπεδο που περνάει από το σημείο P , και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}$.

Βλέπουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής 2.5. Θα δείξουμε ότι αυτή είναι η γενική εξίσωση επιπέδου.

Πρόταση 2.9 Ο γεωμετρικός τόπος μίας εξίσωσης της μορφής

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

όπου τα A, B, C δεν είναι και τα τρία μηδέν, είναι ένα επίπεδο στο χώρο E^3 .

Απόδειξη. Εάν (x_1, y_1, z_1) είναι ένα σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

τότε για κάθε άλλο σημείο (x, y, z) που την ικανοποιεί έχουμε

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

δηλαδή το διάνυσμα $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ είναι κάθετο στο (A, B, C) . Συνεπώς το σημείο με συντεταγμένες (x, y, z) βρίσκεται στο επίπεδο που περνάει από το (x_1, y_1, z_1) και είναι κάθετο στο διάνυσμα (A, B, C) εάν και μόνο εάν $Ax + By + Cz + D = 0$. □

Από τις τιμές των συντελεστών A, B, C, D προσδιορίζουμε τη θέση του επιπέδου σε σχέση με τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

- Εάν $B = C = 0$ και $A \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$x = -\frac{D}{A}$$

και παριστάνει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο Oyz .

- Εάν $A = 0, BC \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$By + Cz + D = 0$$

και παριστάνει το επίπεδο που είναι παράλληλο στο άξονα Ox και τέμνει το επίπεδο Oyz στην ευθεία με εξίσωση $By + Cz + D = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

- Εάν $D = 0$, τότε η εξίσωση

$$Ax + By + Cz = 0$$

παριστάνει επίπεδο που περνάει από το σημείο αναφοράς O .

- Εάν $ABCD \neq 0$, τότε το επίπεδο τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz σε τρία σημεία, $(-\frac{D}{A}, 0, 0), (0, -\frac{D}{B}, 0), (0, 0, -\frac{D}{C})$ αντίστοιχα.

Αντίστροφα, το επίπεδο που τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz στα α, β, γ αντίστοιχα, με $\alpha\beta\gamma \neq 0$, έχει εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

Απόσταση σημείου από επίπεδο

Θεωρούμε ένα επίπεδο Π και ένα σημείο X_1 στο E^3 . Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου X_1 από το επίπεδο Π .

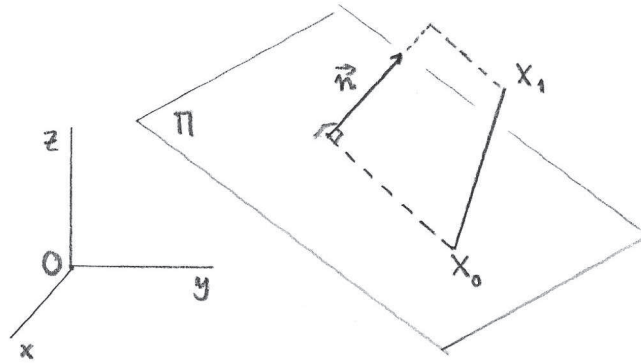
Έστω ότι η εξίσωση του επιπέδου Π είναι $Ax + By + Cz + D = 0$, και $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο Π . Εάν $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου Π , και

$X_1 : (x_1, y_1, z_1)$ σημείο του χώρου E^3 , η προσημασμένη απόσταση του X_1 από το επίπεδο Π είναι το προσημασμένο μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_0 X_1}$ στο $\vec{n}$, Σχήμα 2.11.

$$\begin{aligned} d(X_1, \Pi) &= (\text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{X_0 X_1}) = \frac{\overrightarrow{X_0 X_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

αλλά $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, άρα

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.11: Η απόσταση σημείου από επίπεδο.

Η απόσταση d είναι θετική εάν το X_1 βρίσκεται στον ημίχωρο προς τον οποίο κατευθύνεται το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, C)$, και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Δραστηριότητα 2.12 Υπολογίστε την απόσταση του σημείου με συντεταγμένες $(1, 1, 2)$ από το επίπεδο με εξίσωση $x + y - z = 1$.