

Διάλεξη 5

Συμβολίζουμε E^3 τον Ευκλείδειο χώρο.

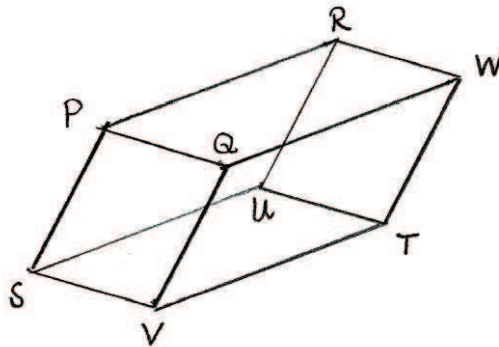
Ορισμός 2.1. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D στο E^3 και τα τμήματα των ευθειών AB, BC, CD και DA που τα συνδέουν, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD , (Σχήμα 1.1). Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA είναι οι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABCD$, ενώ τα σημεία A, B, C, D είναι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $ABCD$.

Τα σύμβολα $ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD . Παρατηρήστε ότι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν $A = B$ και $C = D$.

Εάν τέσσερα σημεία του χώρου σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο, αυτά βρίσκονται σε ένα επίπεδο: το επίπεδο που περιέχει τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου. Η Πρόταση 1.1 ισχύει επίσης για παραλληλόγραμμο στο χώρο.

Ορισμός 2.2. Θεωρούμε τέσσερα σημεία P, Q, R, S στο E^3 . Το **παραλληλεπίπεδο με ακμές PQ, PR, PS** είναι το σχήμα στο χώρο που αποτελείται από τα σημεία P, Q, R, S, T, U, V, W , τέτοια ώστε να σχηματίζουν τα παραλληλόγραμμα $PQWR, PRUS, PSVQ, TUSV, TVQW$ και $TWRU$, που ονομάζονται πλευρές του παραλληλεπιπέδου. Τα ευθύγραμμα τμήματα $PQ, RW, UT, SV, PR, QW, VT, SU, PS, QV, WT$ και RU είναι οι ακμές του παραλληλεπιπέδου, ενώ τα σημεία P, Q, R, S, T, U, V, W είναι οι κορυφές του παραλληλεπιπέδου με ακμές PQ, PR, PS .

Το παραλληλεπίπεδο με ακμές PQ, PR, PS είναι **εκφυλισμένο** εάν τα σημεία P, Q, R, S βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο στο E^3 .



Σχήμα 2.1: Παραλληλεπίπεδο.

Δραστηριότητα 2.1 Τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ αποτελούν ακμές παραλληλεπίπεδου, του οποίου η κορυφή απέναντι στην O είναι το σημείο D . Σχεδιάστε το παραλληλεπίπεδο και ονοματίστε τις κορυφές του.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γεωμετρικό διάνυσμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, την **αρχή** και το **πέρας** του διανύσματος. Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε διανύσματα που εφάπτονται στην επιφάνεια του επιπέδου E^2 . Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε διανύσματα στο χώρο E^3 .

Οι βασικές έννοιες που ορίσαμε για τα διανύσματα του επιπέδου, όπως

- σημείο εφαρμογής
- μέτρο ή μήκος
- φοράς
- συγγραμμικότητα
- παράλληλη μεταφορά
- ισοδυναμία διανυσμάτων
- φορά διανύσματος, ομόρροπα ή αντίρροπα διανύσματα

ορίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για διανύσματα του χώρου.

Για παράδειγμα, εάν $\overrightarrow{AB}$ είναι ένα διάνυσμα, και A' ένα σημείο του χώρου E^3 , λέμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{AB}$ στο A' , εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο στο χώρο.

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με πραγματικό αριθμό, ορίζονται για διανύσματα του χώρου, και ισχύουν οι ιδιότητες της Πρότασης 1.3. Για την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας (Πρόταση 1.3, β'), εάν τα σημεία O, A, B, C δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε το Σχήμα 1.10 παριστάνει το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές OA, OB, OC , και εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.

Οι πράξεις είναι συμβατές με την παράλληλη μεταφορά σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, Λήμμα 1.4. Για την απόδειξη αρκεί να θεωρήσουμε ότι εάν το A' δεν βρίσκεται στο επίπεδο των A, B, C , τότε το Σχήμα 1.11 παριστάνει το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB, AC, AA' .

Δραστηριότητα 2.2 Για το παραλληλεπίπεδο της Δραστηριότητας 2.1 εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OD}$ και $\overrightarrow{CD}$ συναρτήσει των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα στο χώρο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Η ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$, $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u}$, και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ορίζονται όπως και για διανύσματα του επιπέδου:

- $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$, όπου A' είναι το σημείο στο οποίο η κάθετος από το A τέμνει την ευθεία OB ,
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$, όπου η αλγεβρική τιμή $(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$ είναι ως προς τον προσανατολισμό της OB που ορίζει το διάνυσμα $\vec{v}$.

Οι ιδιότητες του Λήμματος 1.8 και της Πρότασης 1.9 ισχύουν και για διανύσματα του χώρου.

Τέλος η γωνία $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία O, A, B . Δεν θα ορίσουμε προσημασμένη γωνία για δύο διανύσματα στο χώρο, καθώς γι' αυτό απαιτείται να προσδιορίσουμε τον προσανατολισμό του επιπέδου που περιέχει τα διανύσματα, και τούτο δεν μπορεί να γίνει με κανονικό τρόπο για όλα τα επίπεδα του χώρου.

Ελεύθερα διανύσματα στο χώρο

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, εάν $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο χώρο ορίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}]$ να είναι το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων στο χώρο, τα οποία προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\vec{u}$ σε κάθε σημείο του χώρου.

$$[\vec{u}] = \{\vec{v} \text{ διάνυσμα στο χώρο, τέτοιο ώστε } \vec{v} \sim \vec{u}\}.$$

Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις διανυσμάτων στο χώρο που έχουμε περιγράψει: πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό, προβολή διανύσματος σε διάνυσμα, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ ελευθέρων διανυσμάτων.

Για παράδειγμα, εάν $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ορίζουμε το άθροισμα των ελευθέρων διανυσμάτων $[\overrightarrow{OA}]$ και $[\overrightarrow{OB}]$

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}] &= [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}] \\ &= [\overrightarrow{OC}]. \end{aligned}$$

Εάν $\vec{u} \sim \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} \sim \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} \sim \overrightarrow{OC}$, τότε

$$[\vec{u}] + [\vec{v}] = [\vec{w}].$$

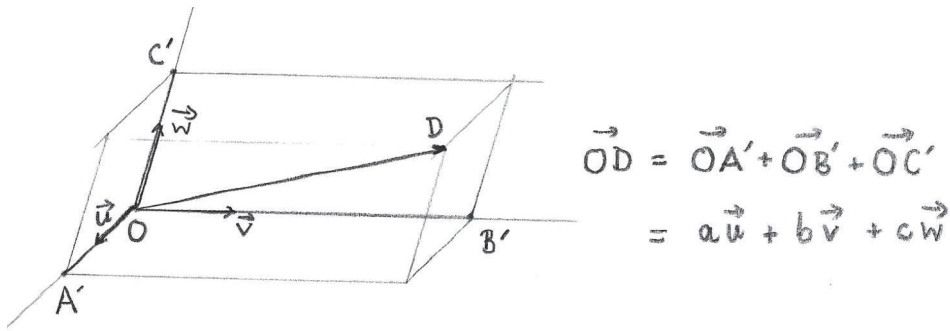
Πρόταση 2.1 Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε για κάθε (ελεύθερο) διάνυσμα $\vec{z}$ του χώρου, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δεν είναι οποιαδήποτε δύο από αυτά συγγραμμικά. Θεωρούμε σημεία O, A, B, C, D τέτοια ώστε $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ και $\vec{z} = \text{vect}OD$. Θεωρούμε το επίπεδο Π το οποίο περνάει από το

σημείο D και είναι παράλληλο προς το επίπεδο που ορίζουν τα (μη συγγραμμικά) διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ο φορέας του $\vec{OC}$ (δηλαδή η ευθεία OC) τέμνει το Π σε ένα σημείο C' . Ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό c από τη σχέση $\vec{OC'} = c\vec{OC}$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τα σημεία A' και B' πάνω στις ευθείες OA και OB αντίστοιχα, και τους πραγματικούς αριθμούς a και b έτσι ώστε $\vec{OA'} = a\vec{OA}$ και $\vec{OB'} = b\vec{OB}$.



Σχήμα 2.2: Ανάλυση διανύσματος σε τρεις συνιστώσες

Από την κατασκευή σχηματίζεται παραλληλεπίπεδο με ακμές OA', OB', OC' , και κορυφή D , Σχήμα 2.2.

Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} \\ &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.\end{aligned}$$

□

Η πρόταση δείχνει ότι εάν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

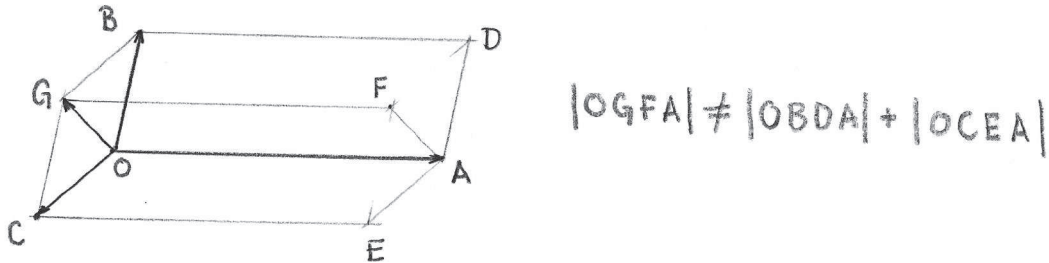
Συμπεραίνουμε ότι κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από τρία διανύσματα στο χώρο, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Παρατηρούμε ότι τρία διανύσματα τα οποία δεν εφάπτονται στο ίδιο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

Όταν μελετάμε διανύσματα στο χώρο αποκτά ενδιαφέρον μία άλλη πράξη, την οποία θα ορίσουμε με γεωμετρικό τρόπο στη συνέχεια.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{OA}$ και $\vec{v} = \vec{OB}$, και το παραλληλόγραμμο με πλευρές OA και OB , $OADB$, (Σχήμα 2.3). Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι ένας θετικός αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και τη γωνία μεταξύ τους. Μπορούμε να ορίσουμε μία πράξη η οποία, στο ζεύγος διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ αντιστοιχεί

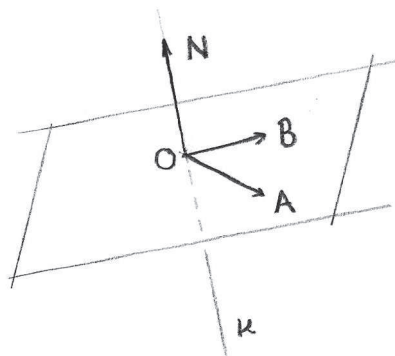
το εμβαδόν $|OADB|$ του παραλληλογράμμου $OADB$. Όμως είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι, ακόμα και στο επίπεδο, αυτή η πράξη δεν διαθέτει μία από τις βασικές ιδιότητες που θα θέλαμε, την επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση.



Σχήμα 2.3: Το εμβαδόν παραλληλογράμμου δεν είναι επιμεριστικό

Εάν $\vec{OC}$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα και $\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OC}$, η επιμεριστικότητα θα σήμαινε ότι το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων $OADB$ και $OAEC$ θα ήταν ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $OAFG$, $|OADB| + |OAEC| = |OAFG|$, πράγμα που εν γένει δεν ισχύει, Σχήμα 2.3.

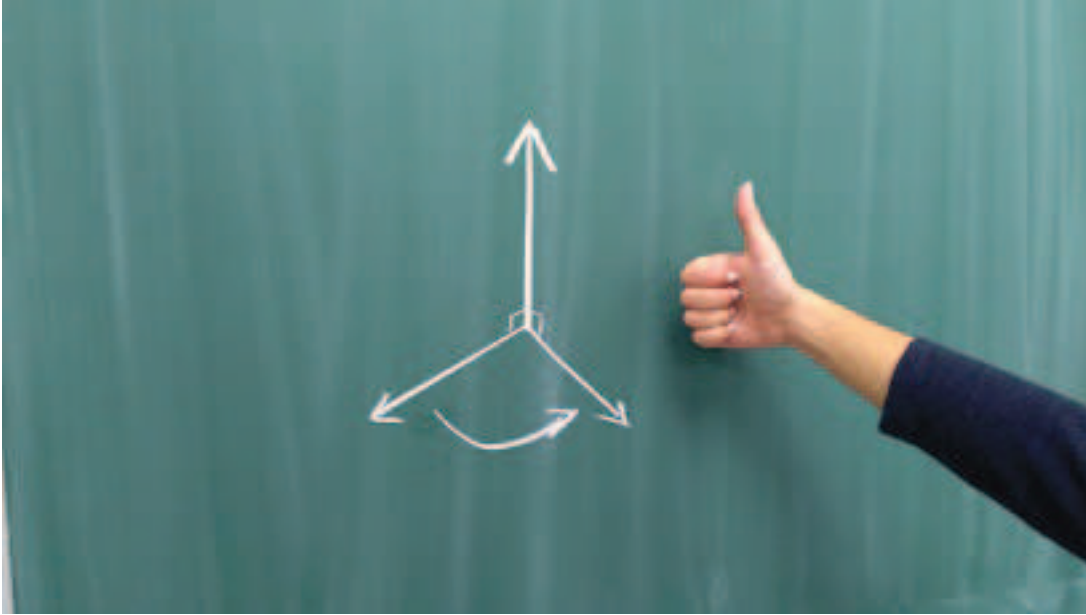
Για να ορίσουμε μία πράξη με χρήσιμες ιδιότητες πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας, εκτός από το εμβαδόν και τον προσανατολισμό του παραλληλογράμμου μέσα στο χώρο. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π που περιέχει το σημείο αναφοράς O , και τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.



Σχήμα 2.4: Προσανατολισμός επιπέδου από κάθετο διάνυσμα

Θεωρούμε την ευθεία κ η οποία περνάει από το O και είναι κάθετη στο επίπεδο Π . Αυτό σημαίνει ότι η κ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του Π που περνάει από το O , ειδικότερα στους φορείς των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$. Τα μη μηδενικά διανύσματα με φορέα την κ διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τη φορά τους.

Ορισμός 2.3. Εάν $\vec{ON}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα με φορέα κ , ορίζουμε τον **προσανατολισμό** του επιπέδου Π που αντιστοιχεί στο $\vec{ON}$ να είναι η φορά περιστροφής του επιπέδου που προσδιορίζουν τα δάκτυλα του **δεξιού** χεριού, όταν ο αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{ON}$, Σχήμα 2.4, Σχήμα 2.5.



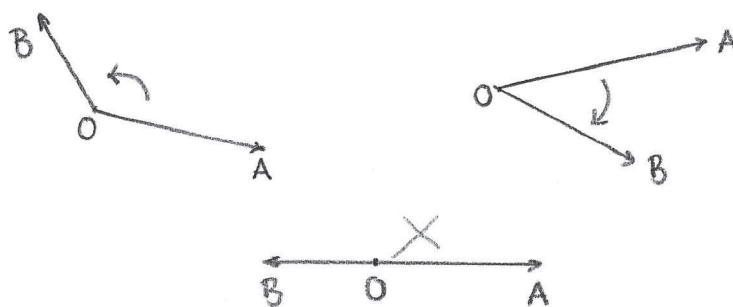
Σχήμα 2.5: Ο κανόνας του δεξιού χεριού

Είναι φανερό ότι ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{ON}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που αντιστοιχεί στο $\vec{ON}$, ενώ ο προσανατολισμός που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα αντίρροπο προς το $\vec{ON}$ είναι αντίθετος.

Παρατηρούμε ότι μία διάταξη στο ζεύγος μη συγγραμμικών διανυσμάτων $(\vec{OA}, \vec{OB})$ επίσης προσδιορίζει ένα προσανατολισμό στο επίπεδο Π : τη φορά περιστροφής του επιπέδου η οποία μεταφέρει το διάνυσμα $\vec{OA}$ σε ένα διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{OB}$, μετά από στροφή κατά κυρτή γωνία ϑ , με $0 < \vartheta < \pi$, Σχήμα 2.6.

Η αντίθετη διάταξη των διανυσμάτων, $(\vec{OB}, \vec{OA})$, προσδιορίζει τον αντίθετο προσανατολισμό.

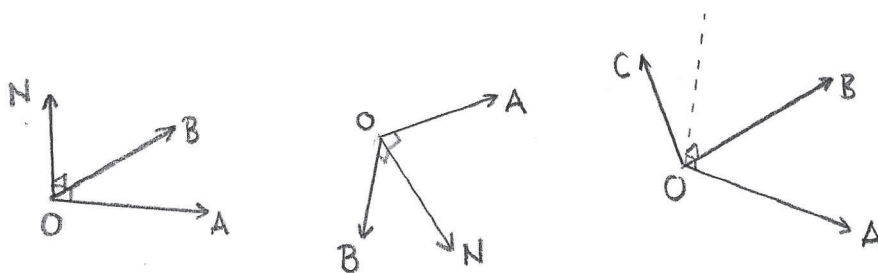
Με αυτόν τον τρόπο, στο διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων $(\vec{OA}, \vec{OB})$ αντιστοιχεί μία φορά πάνω στην κάθετο κ : η φορά των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στον προσανατολισμό του επιπέδου που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{OA}, \vec{OB})$.



Σχήμα 2.6: Προσδιορισμός προσανατολισμού επιπέδου από διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων

Ορισμός 2.4. Όταν ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{OA}, \vec{OB})$ συμπίπτει με τον προσανατολισμό που προσδιορίζει το κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα $\vec{ON}$, λέμε ότι η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{ON})$ αποτελεί ένα **δεξιόστροφο σύστημα**, Σχήμα 2.7.

Γενικότερα, θεωρούμε τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$ και $\vec{w} = \vec{OC}$. Η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ αποτελεί ένα **δεξιόστροφο σύστημα** εάν το πέρας C του διανύσματος $\vec{w}$ βρίσκεται στον ίδιο ημιχώρο του επιπέδου O, A, B με το κάθετο διάνυσμα $\vec{ON}$ που προσδιορίζει τον ίδιο προσανατολισμό με το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{u}, \vec{v})$.



Σχήμα 2.7: Δεξιόστροφα συστήματα διανυσμάτων

Δραστηριότητα 2.3 Με τρία μολύβια (ή τρία καλαμάκια, ή τρία σπέρτα) ελέγξτε ότι εάν η τριάδα $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, το ίδιο ισχύει και για την τριάδα $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, αλλά όχι για την τριάδα $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μία νέα πράξη μεταξύ δύο διανυσμάτων στο χώρο, η οποία σχετίζεται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα, αλλά έχει την επιμεριστική ιδιότητα.

Ορισμός 2.5. Θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ το οποίο έχει φορέα τον κ , φορά αυτήν που προσδιορίζεται από τη διάταξη $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, και μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με ακμές OA, OB . Ορίζουμε το **εξωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ να είναι το διάνυσμα

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \overrightarrow{OX} & \text{εάν τα } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ είναι συγγραμμικά} \\ \overrightarrow{OX} & \text{εάν τα } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ δεν είναι συγγραμμικά.} \end{cases}$$

Η παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων είναι συμβατή με την πράξη του εξωτερικού γινομένου. Εάν $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$, ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των ελεύθερων διανυσμάτων $[\overrightarrow{OA}]$ και $[\overrightarrow{OB}]$

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{OA}] \times [\overrightarrow{OB}] &= [\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}] \\ &= [\overrightarrow{OC}]. \end{aligned}$$

Εάν $\vec{u} \sim \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} \sim \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} \sim \overrightarrow{OC}$, τότε έχουμε την ισότητα ελεύθερων διανυσμάτων

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}.$$

Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 2.2 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ και το αριθμό a : Τότε

$$\alpha'. \quad \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

$$\beta'. \quad (a\vec{x}) \times \vec{y} = a(\vec{x} \times \vec{y})$$

$$\gamma'. \quad \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$$

Απόδειξη. Τα 1 και 2 αποδεικνύονται εύκολα από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Το 3 θα αποδειχθεί όταν ορίσουμε το μικτό γινόμενο, στη σελίδα 63.

□