

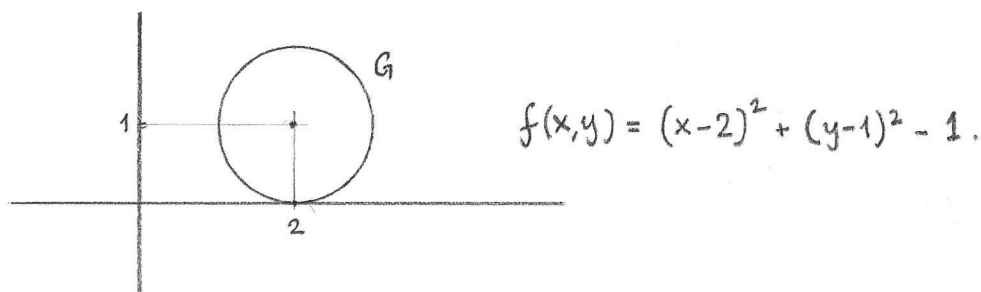
Διάλεξη 4

Γεωμετρικοί Τόποι

Έχοντας επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο, μπορούμε να περιγράψουμε γεωμετρικά αντικείμενα του επιπέδου μέσω των συνόλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν στα σημεία τους. Υπάρχουν δύο βασικά διαφορετικοί τρόποι περιγραφής ενός συνόλου που αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη αριθμών: με αναλυτικές εξισώσεις ή σε παραμετρική μορφή. Αυτές οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις οδηγούν, σε πιο προχωρημένο επίπεδο, σε δύο διαφορετικούς κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών, την Αλγεβρική Γεωμετρία και τη Διαφορική Γεωμετρία.

Αναλυτικές εξισώσεις

Θεωρούμε το επίπεδο με δεδομένο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, έτσι ώστε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) . Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών δίδει έναν αριθμό, προσδιορίζει ένα σύνολο στο επίπεδο με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε όλα τα σημεία $P(p_1, p_2)$ του επιπέδου, για τις συντεταγμένες των οποίων ισχύει $f(p_1, p_2) = 0$: δηλαδή τα σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες στο σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. Αυτό το υποσύνολο G του επιπέδου ονομάζεται *γεωμετρικός τόπος* της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, Σχήμα 1.28. Συχνά ταυτίζουμε το υποσύνολο του επιπέδου με το σύνολο των συντεταγμένων, και αναφερόμαστε στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ ως το γεωμετρικό τόπο της $f(x, y) = 0$. Λέμε επίσης ότι η εξίσωση $f(x, y) = 0$ είναι η *αναλυτική εξίσωση* του υποσυνόλου G του επιπέδου ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Σχήμα 1.28: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$.

Ορισμός 1.20. Ο γεωμετρικός τόπος G της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ικανοποιούν την εξίσωση $f(x, y) = 0$.

Η εξίσωση $f(x, y) = 0$ είναι η **αναλυτική εξίσωση** του συνόλου G .

Παράδειγμα 1.5 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = ax + by + c$. Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $ax + by + c = 0$ είναι το σύνολο (των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες στο) $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$. Γνωρίζουμε ότι αυτό το σύνολο είναι μία ευθεία, τις ιδιότητες της οποίας θα υπενθυμίσουμε στην επόμενη διάλεξη. Η αναλυτική εξίσωση μίας ευθείας, ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι της μορφής $ax + by + c = 0$.

Παράδειγμα 1.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$, όπου $r > 0$. Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x^2 + y^2 = r^2$, δηλαδή τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση r από το σημείο $(0, 0)$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα r , ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι της μορφής $x^2 + y^2 = r^2$.

Παράδειγμα 1.7 Θέλουμε να περιγράψουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο C , με συντεταγμένες (a, b) , και ακτίνα 3. Εάν το σημείο P , με συντεταγμένες (x, y) , βρίσκεται σε αυτόν τον κύκλο, η απόσταση από το P στο C είναι 3, $|\overrightarrow{CP}| = 3$, και συνεπώς $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = 3$. Συμπεραίνουμε ότι ο δεδομένος κύκλος μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - 3$.

Αφού $|\overrightarrow{CP}| \geq 0$, το ίδιο ακριβώς σύνολο σημείων ικανοποιεί την εξίσωση $|\overrightarrow{CP}|^2 = 9$, σε συντεταγμένες $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 9$. Συνεπώς μία απλούστερη περιγραφή του κύκλου δίδεται από τη συνάρτηση $g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 9$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου με κέντρο $C : (a, b)$ και ακτίνα r , είναι $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Παράδειγμα 1.8 Η εξίσωση $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ ικανοποιείται μόνο από το σημείο P με συντεταγμένες (a, b) .

Δραστηριότητα 1.26 Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $y = 5$;

Προσέξτε ότι όταν μία από τις συντεταγμένες δεν εμφανίζεται στην αναλυτική εξίσωση, δεν σημαίνει ότι η συντεταγμένη παίρνει υποχρεωτικά την τιμή μηδέν. Αντιθέτως, σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός σε αυτή τη συντεταγμένη, και παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$.

Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $x^2 = 4$;

Παράδειγμα 1.9 Εάν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2$, το γινόμενό τους $f(x, y)g(x, y)$ μηδενίζεται ακριβώς όταν μηδενίζεται τουλάχιστον μία από τις f και g . Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y)g(x, y) = 0$ είναι η ένωση των γεωμετρικών τόπων

των εξισώσεων $f(x, y) = 0$ και $g(x, y) = 0$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $y^2 - x^2 = 0$ ισοδυναμεί με $(y+x)(y-x) = 0$, και ο γεωμετρικός τόπος της είναι η ένωση δύο ευθειών ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $y+x=0$ και $y-x=0$.

Παράδειγμα 1.10 Εάν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2$, το άθροισμα των τετραγώνων τους $f(x, y)^2 + g(x, y)^2$ μηδενίζεται ακριβώς όταν μηδενίζονται και οι δύο συναρτήσεις f και g . Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 0$ είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων των εξισώσεων $f(x, y) = 0$ και $g(x, y) = 0$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Παραμετρική περιγραφή

Σε αυτή την περίπτωση περιγράφουμε ένα υποσύνολο του επιπέδου ως την εικόνα μίας απεικόνισης από την ευθεία στο επίπεδο.

Θεωρούμε συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$, και την απεικόνιση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία αντιστοιχίζει στον αριθμό t το διατεταγμένο ζεύγος $(x(t), y(t))$. Τότε καθώς η παράμετρος t παίρνει διαφορετικές τιμές σε κάποιο διάστημα στο $\mathbb{R}$, το σημείο $P(t)$ με συντεταγμένες $(x(t), y(t))$ διαγράφει μία καμπύλη στο επίπεδο.

Ορισμός 1.21. Οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ αποτελούν **παραμετρική περιγραφή** του συνόλου G του επιπέδου εάν για κάθε σημείο του G υπάρχει τουλάχιστον ένα t τέτοιο ώστε οι συντεταγμένες του σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ είναι $(x(t), y(t))$.

Παράδειγμα 1.11 Η ευθεία στο επίπεδο που περνάει από τα σημεία $A: (1, 2)$ και $B: (-1, 3)$ έχει παραμετρική περιγραφή $f(t) = (1-2t, 2+t)$. Πράγματι, εάν το σημείο $X: (x, y)$ βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A, B , το διάνυσμα $\overrightarrow{AX}$ είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$, και συνεπώς $(x-1, y-2) = t(-2, 1)$. Άρα μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας AB είναι

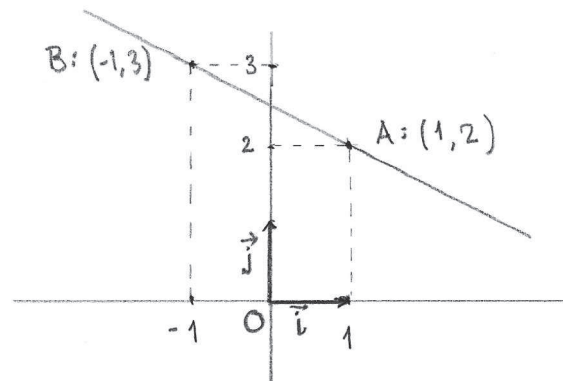
$$(x, y) = (1 - 2t, 2 + t).$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραμετρική περιγραφή σε **διανυσματική μορφή**, εκφράζοντας το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ευθείας ως συνάρτηση της παραμέτρου t :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

ή σε συντεταγμένες $(x, y) = (1, 2) + t(-2, 1)$.

Δραστηριότητα 1.27 Βρείτε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας που περνάει από τα σημεία $C: (1, 1)$ και $D: (3, 2)$.

Σχήμα 1.29: Παραμετρική περιγραφή της ευθείας AB .

Παράδειγμα 1.12 Ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r έχει παραμετρική περιγραφή, με παράμετρο θ για $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$f(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Μία διαφορετική παραμετρική περιγραφή του κύκλου ακτίνας r , που δεν χρησιμοποιεί τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι η

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad \text{για } -r \leq t \leq r.$$

Αυτή η παραμέτρηση καλύπτει μόνο το ημικύκλιο όπου $y \geq 0$. Για να καλύψουμε όλο τον κύκλο χρειαζόμαστε και μία δεύτερη παραμέτρηση,

$$x(t) = t, \quad y(t) = -\sqrt{r^2 - t^2}, \quad \text{για } -r \leq t \leq r.$$

Δραστηριότητα 1.28 Βρείτε την παραμετρική περιγραφή του κύκλου με κέντρο στο σημείο $(1, 1)$ και ακτίνα 2.

Εάν γνωρίζουμε την παραμετρική περιγραφή ενός συνόλου, μπορούμε να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις με *απαλοιφή των παραμέτρων*. Θεωρούμε την ευθεία στο επίπεδο, με παραμετρικές συναρτήσεις $x(t) = 1 - t$ και $y(t) = 2 - 3t$. Λύνοντας ως προς t έχουμε

$$t = 1 - x \quad \text{και} \quad t = \frac{2 - y}{3}.$$

Εξισώνουμε τις δύο εκφράσεις για την παράμετρο t και έχουμε

$$1 - x = \frac{1}{3}(2 - y)$$

απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση της ευθείας $3x + y - 5 = 0$.

Δραστηριότητα 1.29 Δίδεται η παραμετρική περιγραφή μίας ευθείας $(x, y) = (-1, 1) + t(1, 1)$. Βρείτε το σημείο της ευθείας που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = 1$.

Βρείτε και το σημείο για $t = -1$.

Απαλείψτε την παραμετρο t για να βρείτε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας.

Ευθείες στο επίπεδο

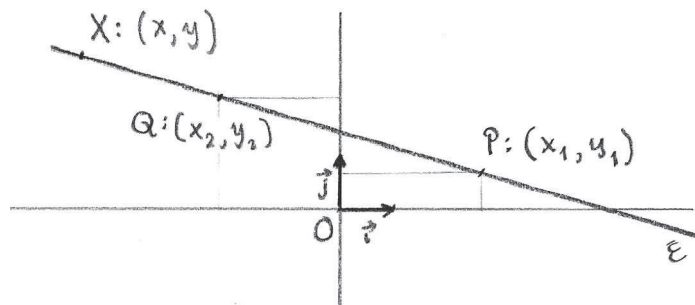
Μία ευθεία ε στο επίπεδο προσδιορίζεται εάν γνωρίζουμε δύο σημεία της, ή εάν γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και ένα διάνυσμα στη διεύθυνση της ευθείας.

Θεωρούμε δύο σημεία P και Q , με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα, και ε την ευθεία που περνάει από τα σημεία P και Q . Εάν $X : (x, y)$ είναι το γενικό σημείο πάνω στην ευθεία ε , το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$, και συνεπώς $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}$ για κάποιο αριθμό t . Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του σημείου X :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ},$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.30: Η ευθεία από τα σημεία P και Q .

Εάν $x_2 - x_1 = 0$, η 1.3 δίδει την εξίσωση $x = x_1$. Εάν $y_2 - y_1 = 0$, η 1.3 δίδει την εξίσωση $y = y_1$. Υπενθυμίζουμε ότι μία μεταβλητή που δεν εμφανίζεται σε μία εξίσωση, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $x = x_1$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες (x_1, y) για $y \in \mathbb{R}$, δηλαδή μία ευθεία παράλληλη προς τον y -άξονα.

Εάν $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$, μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο t από τις σχέσεις $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ και $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$, για να πάρουμε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε ,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

ή

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + C = 0$.

Θεωρούμε το σημείο $P : (x_1, y_1)$ και το διάνυσμα $\vec{a} = (u, v)$. Η ευθεία ε που περνάει από το P και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει γενικό σημείο $X : (x, y)$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{a}$. Συνεπώς $\overrightarrow{PX} = t\vec{a}$ για κάποιο αριθμό t . Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του σημείου X :

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{a},$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(u, v).$$

Εάν $u = 0$ η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον y -άξονα, και έχει αναλυτική εξίσωση $x = x_1$. Εάν $v = 0$ η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον x -άξονα, και έχει αναλυτική εξίσωση $y = y_1$.

Εάν $uv \neq 0$, μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο t από τις σχέσεις $x - x_1 = tu$ και $y - y_1 = tv$, για να πάρουμε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε ,

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v},$$

ή

$$vx - uy - vx_1 + uy_1 = 0.$$

Παρατηρούμε ότι και αυτή η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + C = 0$.

Θα δείξουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + C = 0$, όπου τα A, B δεν είναι και τα δύο μηδέν παριστάνει μία ευθεία.

Πρόταση 1.11 Ο γεωμετρικός τόπος μίας εξίσωσης της μορφής

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.4}$$

όπου τα A, B δεν είναι και τα δύο μηδέν, είναι μία ευθεία στο επίπεδο.

Απόδειξη. Εάν $A = 0$, τότε $B \neq 0$, και η εξίσωση $Ax + By + C = 0$ γίνεται $y = -C/B$. Ο γεωμετρικός τόπος αυτής της εξίσωσης είναι όλα τα σημεία με δεύτερη συντεταγμένη $-C/B$, δηλαδή μία ευθεία παράλληλη με τον x -άξονα, που τέμνει τον y -άξονα στο σημείο $(0, -C/B)$.

Παρόμοια, εάν $B = 0$ και $A \neq 0$, η εξίσωση 1.4 γίνεται $x = -C/A$, και ο γεωμετρικός τόπος είναι μία ευθεία παράλληλη με τον y -άξονα που τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(-C/A, 0)$.

Εάν τώρα $AB \neq 0$, ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης 1.4 περιέχει τα σημεία $P : (-C/A, 0)$ και $Q : (1 - (C/A), -A/B)$. Θα δείξουμε ότι εάν $X : (x, y)$ είναι οποιοδήποτε άλλο σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$, και συνεπώς το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα P και Q .

Το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ}$ έχει συντεταγμένες $(1, -A/B)$. Αφού $Ax + By + C = 0$, έχουμε $y = -\frac{Ax+C}{B}$, και συνεπώς το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ έχει συντεταγμένες

$$\left(x + \frac{C}{A}, y\right) = \left(\frac{Ax+C}{A}, -\frac{Ax+C}{B}\right) = \frac{Ax+C}{A} \left(1, -\frac{A}{B}\right).$$

Άρα $\overrightarrow{PX}$ και $\overrightarrow{PQ}$ είναι συγγραμμικά, και X βρίσκεται στην ευθεία ε . □

Δραστηριότητα 1.30 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{array}{ll} \alpha') & x = 3 \\ \beta') & y = 2 \\ \gamma') & x + y = 0 \\ \delta') & x + y = 2 \\ \varepsilon') & x - y = 0 \\ \zeta') & x - y = -3 \end{array}$$

Πρόταση 1.12 Εάν $P : (x_1, y_1)$ και $Q : (x_2, y_2)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$,

α'. Το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ είναι κάθετο προς το $\overrightarrow{PQ}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{n}$ λέγεται **κάθετο διάνυσμα** της ευθείας ε .

β'. Το διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται **διάνυσμα διεύθυνσης** της ευθείας ε .

γ'. Εάν $B \neq 0$, τότε

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ο αριθμός $\lambda = -A/B$ ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλήση** της ευθείας ε .

δ'. Η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$, τέμνει τον x -άξονα στο σημείο με συντεταγμένες $(-C/A, 0)$ και τον y -άξονα στο σημείο με συντεταγμένες $(0, -C/B)$.

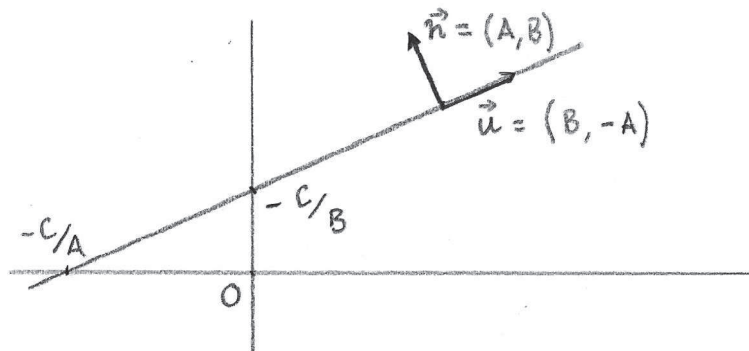
Απόδειξη. Αφού $Ax_1 + By_1 + C = 0$ και $Ax_2 + By_2 + C = 0$, έχουμε $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.

α'. Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ με το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ είναι $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Άρα $\vec{n}$ είναι κάθετο προς το $\overrightarrow{PQ}$.

β'. Το διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ εάν υπάρχει μ τέτοιο ώστε $x_2 - x_1 = \mu B$ και $y_2 - y_1 = -\mu A$. Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση για τα x, y όταν $A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1)$.

γ'. Εάν $B \neq 0$, διαιρώντας την $y_2 - y_1 = -\mu A$ με την $x_2 - x_1 = \mu B$, έχουμε

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Σχήμα 1.31: Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C = 0$.

□

Δραστηριότητα 1.31 Εξηγήστε γιατί στην εξίσωση της ευθείας στο Σχήμα 1.31 οι συντελεστές είναι $A < 0$, $B > 0$ και $C < 0$. Τί θα άλλαζε στο Σχήμα εάν πολλαπλασιάζαμε και τους τρεις συντελεστές με -1 ;

Δραστηριότητα 1.32 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για τις ακόλουθες ευθείες στο επίπεδο.

$$\alpha') 2x + 3y = 5, \quad \beta') 3x = 2y - 5.$$

Θεωρούμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ αντίστοιχα, με $B_1B_2 \neq 0$ και συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -A_1/B_1$ και $\lambda_2 = -A_2/B_2$.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες εάν οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ίσοι, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται κάθετα εάν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι -1 , $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Εάν $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και τέμνονται σε ένα σημείο.

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του κοινού σημείου, λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix},$$

και βρίσκουμε

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Δραστηριότητα 1.33 Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις

$$x - y - 1 = 0, \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Συντεταγμένες σημείου πάνω σε ευθεία

Εάν τα σημεία P_1 , P_2 και P βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, έχουμε ορίσει τον απλό λόγο $\mu = (P_1 P_2 P) = \frac{(P_1 P)}{(P P_2)}$, Ορισμός 1.11. Εάν τα σημεία έχουν συντεταγμένες $P_1 : (x_1, y_1)$, $P_2 : (x_2, y_2)$ και $P : (x, y)$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, τότε $\overrightarrow{P_1 P} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ και $\overrightarrow{P P_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$. Από τη σχέση $\overrightarrow{P_1 P} = \mu \overrightarrow{P P_2}$, συμπεραίνουμε ότι

$$x - x_1 = \mu(x_2 - x) \quad \text{και} \quad y - y_1 = \mu(y_2 - y).$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου P δίδονται συναρτήσει των συντεταγμένων των P_1 και P_2 , και του απλού λόγου $\mu = (P_1 P_2 P)$ από τους τύπους

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}. \quad (1.5)$$

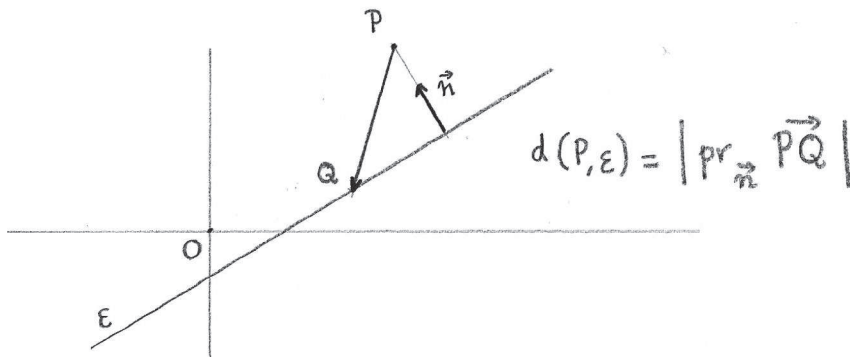
Όταν $\mu > 0$, το P βρίσκεται μεταξύ των P_1 και P_2 , και οι τύποι δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα $P_1 P_2$ σε δύο τμήματα με λόγο $\mu : 1$.

Δραστηριότητα 1.34 Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα AB , με $A : (3, -1)$ και $B : (-2, 3)$ σε λόγο 3 : 2.

Απόσταση σημείου από ευθεία

Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση $d(P, \varepsilon)$ του σημείου $P : (x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Εάν Q είναι οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε , η απόσταση $d(P, \varepsilon)$ είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$ σε ένα κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ της ευθείας ε , Σχήμα 1.32,

$$d(P, \varepsilon) = |\text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{PQ}|.$$



Σχήμα 1.32: Απόσταση σημείου από ευθεία.

Εάν το σημείο Q έχει συντεταγμένες (x_1, y_1) , τότε

$$\begin{aligned} |\text{pr}_{\vec{n}} \vec{PQ}| &= \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot (A, B)|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(Ax_0 + By_0 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Αλλά οι συντεταγμένες του σημείου Q ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας ε , δηλαδή $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Συνεπώς

$$|\text{pr}_{\vec{n}} \vec{PQ}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Πρόταση 1.13 Η απόσταση $d(P, \varepsilon)$ του σημείου $P : (x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$ είναι

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.6)$$

Δραστηριότητα 1.35 Βρείτε την απόσταση της ευθείας $2x + y - 3 = 0$ από το σημείο αναφοράς O .

Εφαρμογές στη γεωμετρία του τριγώνου

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Διαμέσων: οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου έχουν ένα κοινό σημείο, το **κέντρο βάρους** του τριγώνου.

Πρόταση 1.14 Θεωρούμε το τρίγωνο ABC , του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες (a_1, a_2) , (b_1, b_2) και (c_1, c_2) αντίστοιχα. Το σημείο A' είναι το μέσο της πλευράς BC , το B' είναι το μέσο της πλευράς CA και το C' είναι το μέσο της πλευράς AB . Τότε οι ευθείες AA' , BB' και CC' τέμνονται σε ένα σημείο G , με συντεταγμένες

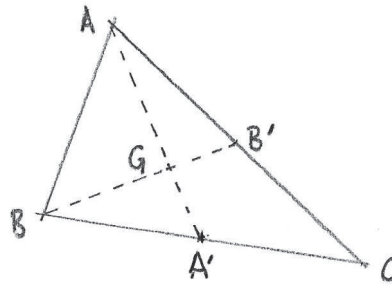
$$\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right).$$

Το σημείο $A' : (a'_1, a'_2)$ διαιρεί το διάστημα BC σε λόγο 1:1, και από την (1.5) έχουμε τις συντεταγμένες του

$$a'_1 = \frac{b_1 + c_1}{2} \quad a'_2 = \frac{b_2 + c_2}{2}.$$

Παρόμοια για το $B' : (b'_1, b'_2)$

$$b'_1 = \frac{a_1 + c_1}{2} \quad b'_2 = \frac{a_2 + c_2}{2}.$$



Σχήμα 1.33: Οι διάμεσοι τριγώνου.

Το σημείο τομής των AA' και BB' έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AA'}$ και επίσης $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BB'}$. Δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BB'}.$$

Σε συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 + s\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1\right) &= b_1 + t\left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1\right) \\ a_2 + s\left(\frac{b_2 + c_2}{2} - a_2\right) &= b_2 + t\left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2\right) \end{aligned}$$

και συγκεντρώνοντας τους όμοιους όρους έχουμε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι αριθμοί s, t :

$$\begin{aligned} \left(-a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{c_1}{2}\right)s + \left(b_1 - \frac{a_1}{2} - \frac{c_1}{2}\right)t &= b_1 - a_1 \\ \left(-a_2 + \frac{b_2}{2} + \frac{c_2}{2}\right)s + \left(b_2 - \frac{a_2}{2} - \frac{c_2}{2}\right)t &= b_2 - a_2 \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}$ δεν είναι παράλληλα και συνεπώς οι συντελεστές της πρώτης εξίσωσης δεν είναι πολλαπλάσια των συντελεστών της δεύτερης εξίσωσης. Άρα οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε: $s = \frac{2}{3}, t = \frac{2}{3}$. Συμπεραίνουμε ότι σημείο τομής των ευθειών AA' και BB' είναι το σημείο G το οποίο ικανοποιεί

$$(AA'G) = (BB'G) = 2$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το σημείο τομής G' των AA' και CC' ικανοποιεί

$$(AA'G') = (CC'G') = 2,$$

και συνεπώς $G = G'$.

Τέλος μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα θέσης και τις συντεταγμένες του G :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right) \\
 &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
 &= \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.13 Θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές $A : (1, 4)$, $B : (0, 0)$ και $C : (3, 1)$ και ύψη AA' , BB' , CC' . Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για να δείξετε ότι τα τρία ύψη τέμνονται σε ένα σημείο, το **ορθόκεντρο** του τριγώνου ABC .

α'. Σχεδιάστε το τρίγωνο ABC .

β'. Η πλευρά BC έχει κλίση $\lambda_{BC} = 1/3$. Άρα η ευθεία AA' έχει κλίση -3 και περνάει από το σημείο $(1, 4)$. Συνεπώς η εξίσωση της AA' είναι $3x + y - 7 = 0$.

γ'. Η πλευρά CA έχει κλίση $\lambda_{CA} = -3/2$. Άρα η ευθεία BB' έχει κλίση $2/3$ και περνάει από το σημείο $(0, 0)$. Συνεπώς η εξίσωση της BB' είναι $2x - 3y = 0$.

δ'. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και βρίσκουμε ότι τέμνονται στο σημείο $(\frac{21}{11}, \frac{14}{11})$.

ε'. Η ευθεία CC' έχει εξίσωση $x + 4y - 7 = 0$. Ελέγχουμε ότι το σημείο $(\frac{21}{11}, \frac{14}{11})$ βρίσκεται και σε αυτή την ευθεία.