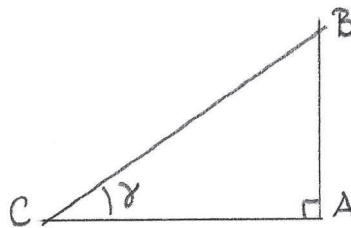


Διάλεξη 3

Προβολή διανύσματος, εσωτερικό γινόμενο

Στην Αναλυτική Γεωμετρία χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο για να προσδιορίσουμε τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Από το σχολείο γνωρίζουμε τον ορισμό του ημιτόνου και του συνημιτόνου γωνίας στο πλαίσιο ενός ορθογωνίου τριγώνου, Σχήμα 1.18.

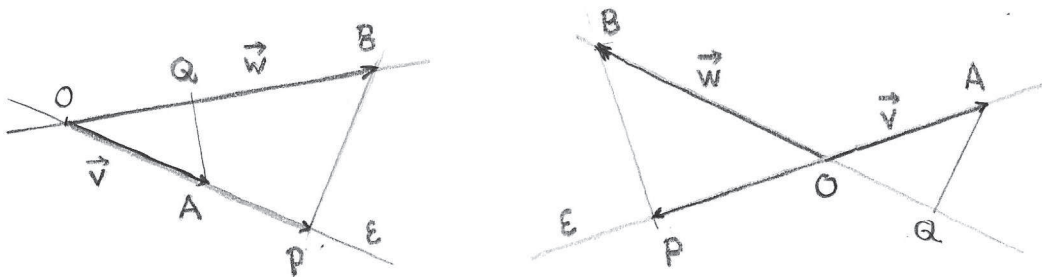
$$\cos \gamma = \frac{|CA|}{|CB|}, \quad \sin \gamma = \frac{|AB|}{|CB|}.$$



Σχήμα 1.18: Ημίτονο και συνημίτονο γωνίας.

Το πρώτο βήμα για να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο γεωμετρικών διανυσμάτων είναι να προσδιορίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό γίνεται μέσω της “ορθογωνίας προβολής”.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα με κοινή αρχή στο O , $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Έστω ε ο φορέας του $\vec{v}$. Από το πέρας του $\vec{w}$ φέρουμε κάθετο προς την ε , και σημειώνουμε P το σημείο όπου αυτή τέμνει την ε , έτσι ώστε η OA και η BP να τέμνονται σε ορθή γωνία, Σχήμα 1.19. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{w}$ στο διάνυσμα $\vec{v}$.



Σχήμα 1.19: Ορθογώνια προβολή διανύσματος σε άξονα.

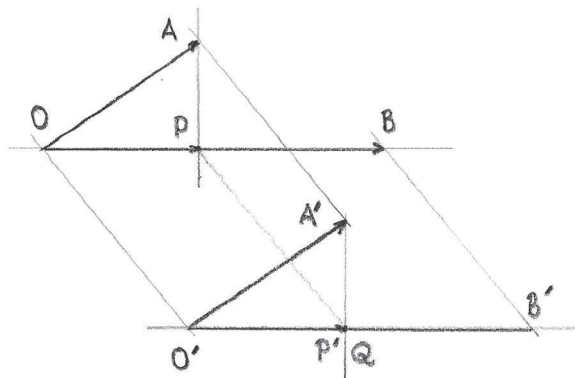
Ανάλογα ορίζουμε την προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{w}$. Από το πέρας του $\vec{v}$ φέρουμε κάθετο προς τον φορέα του $\vec{w}$ και σημειώνουμε Q το σημείο τομής. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OQ}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ στο διάνυσμα $\vec{w}$.

Ορισμός 1.12. Θεωρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και διάνυσμα $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Ονομάζουμε (ορθογώνια) **προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$** , και συμβολίζουμε $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$, το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, όπου P είναι το σημείο τομής της καθέτου από το B προς την OA .

Σημειώνουμε ότι ορισμένοι συγγραφείς ονομάζουν προβολή το προσημασμένο μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, και όχι το ίδιο το διάνυσμα. Από τα συμφραζόμενα είναι συνήθως σαφές ποια σύμβαση χρησιμοποιείται.

Παρατηρούμε ότι εάν τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε το σημείο P συμπίπτει με το O και η ορθογώνια προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Για να εφαρμόσουμε αυτό τον ορισμό σε ελεύθερα διανύσματα, αρκεί να δείξουμε ότι η κατασκευή της προβολής είναι συμβατή με την παράλληλη μεταφορά: εάν $\overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{O'B'}$ προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{OA}$ και του $\overrightarrow{OB}$ στο O' , και $\overrightarrow{O'Q}$ είναι η προβολή του $\overrightarrow{O'A'}$ στο $\overrightarrow{O'B'}$, Σχήμα 1.20, θέλουμε να δείξουμε ότι $\overrightarrow{O'Q}$ συμπίπτει με την παράλληλη μεταφορά $\overrightarrow{OP'}$ του $\overrightarrow{OP}$. Αλλά οι κάθετες ευθείες OP και $A'P'$ μεταφέρονται σε κάθετες ευθείες $O'P'$ και $A'P'$, και συνεπώς $P' = Q$. Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των $\vec{v}$ και $\vec{w}$ που χρησιμοποιούμε στην κατασκευή. Καταλήγουμε ότι η προβολή είναι καλά ορισμένη σε ελεύθερα διανύσματα.



Σχήμα 1.20: Ορθογώνια προβολή και παράλληλη μεταφορά.

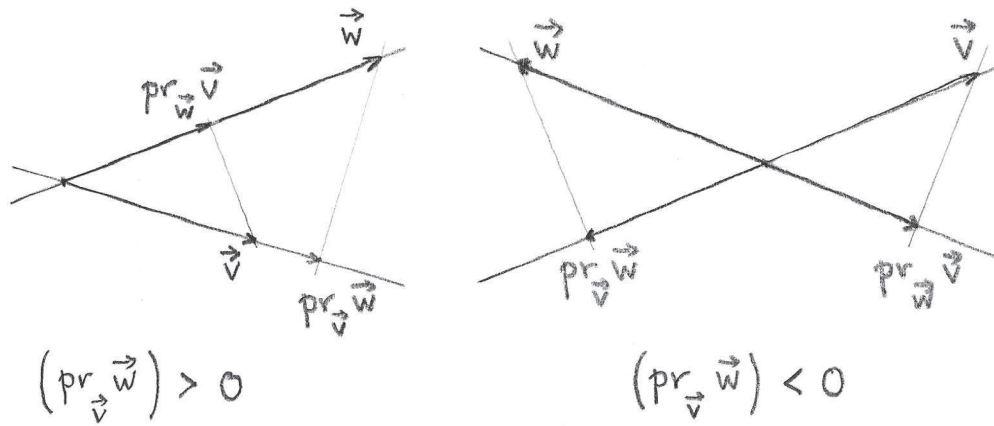
Δραστηριότητα 1.17 Σημειώστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ και $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$. Κατασκευάστε την προβολή $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$. Μεταφέρατε παράλληλα το $\vec{u}$ στο A και κατασκευάστε την προβολή $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{u}$. Ποιά είναι η σχέση των δύο προβολών; (Δεν είναι ίσες!) Βρείτε τα προσημασμένα μέτρα των δύο προβολών, εάν το μήκος της πλευράς του τριγώνου είναι 1.

Παρατηρούμε ότι εάν τα $\vec{v}, \vec{w}$ είναι και τα δύο μη μηδενικά, Σχήμα 1.21

α'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{v}$, και μπορεί να είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\vec{v}$,

- β'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{w}$, και μπορεί να είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\vec{w}$,
- γ'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$ ακριβώς όταν το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{w}$,
- δ'. το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{v}$ ακριβώς όταν το διάνυσμα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{w}$.

Πράγματι η προβολή $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι ομόρροπη με το $\vec{v}$ μόνον όταν το $\vec{w}$ και το $\vec{v}$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την κάθετο από το O στο φορέα του $\vec{v}$, Σχήμα 1.21. Όμως σε αυτήν την περίπτωση τα $\vec{w}$ και $\vec{v}$ βρίσκονται επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την κάθετο από το O στο φορέα του $\vec{w}$, και συνεπώς $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι ομόρροπη με το $\vec{w}$.



Σχήμα 1.21: Προσημασμένο μήκος ορθογώνιας προβολής.

Τώρα θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των προβολών $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ και $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$. Αυτές είναι εν γένει διαφορετικές. Παρατηρούμε όμως ότι τα τρίγωνα OBP και OAQ στο Σχήμα 1.19 είναι όμοια, και συνεπώς $|OA||OP| = |OB||OQ|$, δηλαδή

$$|\vec{v}||\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}| = |\vec{w}||\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}|.$$

Εάν θεωρήσουμε αντί των μέτρων $|\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}|$ και $|\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}|$ τα προσημασμένα μέτρα $(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w})$ και $(\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v})$ ως προς τον προσανατολισμό που ορίζουν στον φορέα τους τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ έχουμε πάλι ισότητα: το πρόσημο είναι το ίδιο, αφού τα $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι αντίρροπα ακριβώς όταν και τα $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα. Συμπεραίνουμε ότι η προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{w}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$|\vec{v}|(\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}) = |\vec{w}|(\text{pr}_{\vec{w}}\vec{v}). \quad (1.1)$$

Αυτός ο αριθμός, που δεν εξαρτάται από το εάν προβάλουμε το $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ ή το $\vec{v}$ στο $\vec{w}$, είναι το εσωτερικό γινόμενο των γεωμετρικών διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

Ορισμός 1.13. Εάν $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό $|\vec{v}| (\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w})$ **εσωτερικό γινόμενο** του $\vec{v}$ και του $\vec{w}$, και το συμβολίζουμε

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| (\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}).$$

Εάν ένα από τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι μηδενικό, ορίζουμε $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

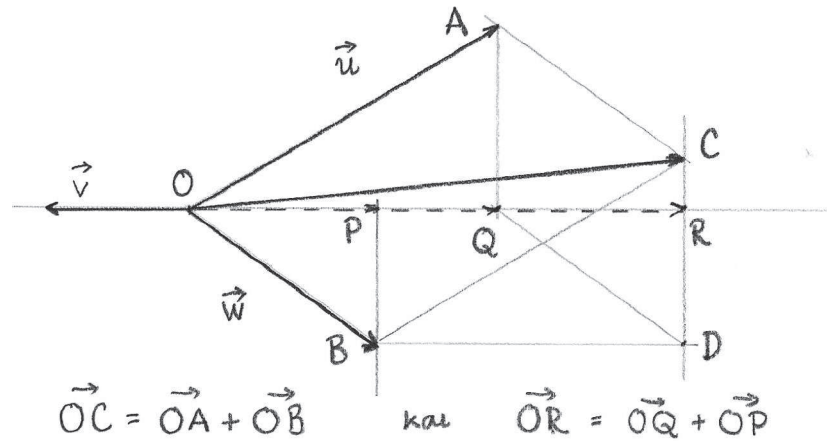
Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορισμένο σε ελεύθερα διανύσματα, αφού αυτό ισχύει για το μέτρο και την προβολή.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σχέση της προβολής και του εσωτερικού γινομένου με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με αριθμό.

Λήμμα 1.8 Η προβολή είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό. Συγκεκριμένα, εάν $\vec{v}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, $\vec{u}$, $\vec{w}$ είναι διανύσματα και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ισότητες

$$a'. \text{pr}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} + \text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$$

$$b'. \text{pr}_{\vec{v}}(a\vec{w}) = a \text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$$



Σχήμα 1.22: Προβολή αθροίσματος.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο Σχήμα 1.22. Αποδεικνύουμε το α'. Θέτουμε $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{OQ}$, $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{OP}$ και $\text{pr}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{OR}$. Η παράλληλος προς την ε από το B τέμνει την κάθετο προς την ε από το C στο σημείο D . Τα τρίγωνα OAQ και BCD είναι ίσα. Άρα $(OQ) = (BD) = (PR)$. Από τον κανόνα του Chasles $(OR) = (OP) + (PR)$, και συνεπώς $(OR) = (OP) + (OQ)$. Άρα $\vec{OR} = \vec{OQ} + \vec{OP}$.

Το β' αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Δραστηριότητα 1.18 Τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ και $\vec{u}$ της Δραστηριότητας 1.17 ικανοποιούν τη σχέση $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$. Χρησιμοποιήστε αυτή τη σχέση για να υπολογίσετε την προβολή $\text{pr}_{\vec{w}}\vec{u}$. Βρίσκετε την ίδια σχέση που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.17;

Οι κυριότερες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1.9 Εάν $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι διανύσματα και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha'. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$

$$\beta'. (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}),$$

$$\gamma'. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$$

$$\delta'. \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \text{ και } |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

ϵ' . Εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι μηδενικά, τότε $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη. Το (α') είναι συνέπεια της (1.1).

Τα (β') και (γ') προκύπτουν από το Λήμμα 1.8.

Για το (δ') , παρατηρούμε ότι $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{u} = \vec{u}$, και πως εάν το $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό, το προσημασμένο μέτρο του $\vec{u}$ ως προς τον άξονα που ορίζει το ίδιο είναι ίσο με το μέτρο του. Άρα

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| (\text{pr}_{\vec{u}}\vec{u}) = |\vec{u}| |\vec{u}| = |\vec{u}|^2 \geq 0.$$

Για το (ϵ') παρατηρούμε ότι εάν τα διανύσματα είναι κάθετα, τότε η ορθογώνια προβολή είναι το μηδενικό διάνυσμα, και συνεπώς $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Αντίστροφα, εάν τα διανύσματα δεν είναι κάθετα, τότε η κάθετος από το πέρας του $\vec{v}$ τέμνει τον φορέα του $\vec{u}$ σε σημείο διαφορετικό από το O , και συνεπώς η προβολή $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα. Άρα $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$.

□

Παρατηρούμε ότι για το εσωτερικό γινόμενο δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής, που ισχύει στον πολλαπλασιασμό αριθμών. Εάν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\vec{v} = \vec{w}$. Το μόνο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι $\vec{v} - \vec{w}$ είναι είτε 0 είτε κάθετο προς το $\vec{u}$.

Δραστηριότητα 1.19 Για τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ και $\vec{u}$ της Δραστηριότητας 1.17 υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{v} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \cdot \vec{w}$, εάν το μήκος της πλευράς του τριγώνου είναι 1.

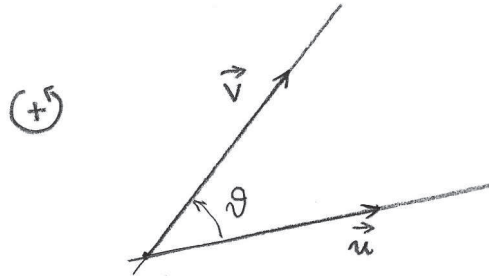
Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Δύο μη μηδενικά διανύσματα με την ίδια αρχή σχηματίζουν μία γωνία. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο τρόπους να μετρήσουμε αυτή τη γωνία. Είτε ως την κυρτή γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων, που παίρνει τιμές από 0 έως π , είτε ως προσημασμένη γωνία σε προσανατολισμένο

επίπεδο, που παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Ορισμός 1.14. Η **γωνία** μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB} = \vartheta$, η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Θα τη συμβολίζουμε $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Εάν έχουμε προσανατολίσει το επίπεδο, επιλέγοντας μία φορά περιστροφής ως θετική¹, τότε η γωνία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.



Σχήμα 1.23: Προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Ορισμός 1.15. Η **προσημασμένη γωνία** $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ ορίζεται ως η γωνία περιστροφής ϑ , με τιμές στο διάστημα $-\pi < \vartheta \leq \pi$, που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{u}$ όταν στρέφεται στο επίπεδο για να συμπίσει με το $\vec{v}$, Σχήμα 1.23.

Παρατηρούμε ότι $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$. Για την προσημασμένη γωνία, εάν $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \neq \pi$, τότε $\angle(\vec{v}, \vec{u}) = -\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων και ο προσανατολισμός του επιπέδου είναι αμετάβλητα από παράλληλη μεταφορά. Συνεπώς η γωνία και η προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο ελεύθερων διανυσμάτων είναι καλά ορισμένες.

Δραστηριότητα 1.20 Σημειώστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και υπολογίστε τις γωνίες $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ και $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$. Υπολογίστε επίσης τις προσημασμένες γωνίες $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ και $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$.

Το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων υπολογίζεται συναρτήσει της προβολής του ενός στο άλλο,

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\text{pr}_{\vec{v}} \vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{\text{pr}_{\vec{w}} \vec{v}}{|\vec{v}|},$$

ή συναρτήσει του εσωτερικού γινομένου

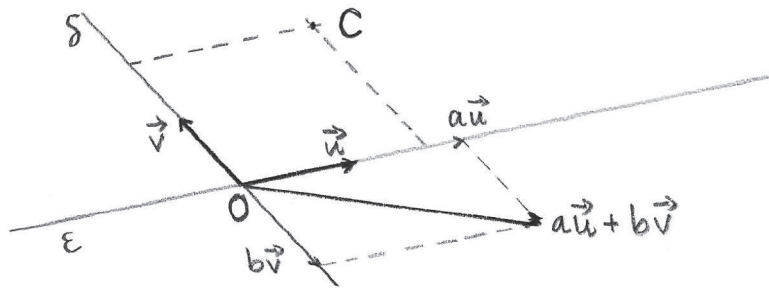
$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}.$$

¹ Συνήθως θεωρούμε θετική φορά περιστροφής την αντίθετη προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.

Σύστημα αναφοράς

Η μέθοδος της Αναλυτικής Γεωμετρίας βασίζεται στην αντιστοίχιση των σημείων του επιπέδου, των διανυσμάτων και άλλων γεωμετρικών αντικειμένων με σύνολα αριθμών, έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές μεθόδους στη μελέτη τους. Η αντιστοίχιση αυτή προϋποθέτει την επιλογή ενός *συστήματος αναφοράς*.

Ορισμός 1.16. Επιλέγουμε στο επίπεδο E^2 , ένα σταθερό σημείο O και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ προσδιορίζουν δύο άξονες, $(\epsilon, \vec{u})$ και $(\zeta, \vec{v})$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο O . Το διατεταγμένο ζεύγος αξόνων $(\epsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$ ονομάζεται **σύστημα αναφοράς** και θα το συμβολίζουμε με $(O, \vec{u}, \vec{v})$, Σχήμα 1.24. Λέμε ότι το σημείο O είναι η *αρχή των αξόνων* του συστήματος αναφοράς.



Σχήμα 1.24: Συντεταγμένες διανύσματος και σημείου σε (μη ορθογώνιο) σύστημα αναφοράς.

Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου E^2 , έχουμε δει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Ορισμός 1.17. Οι αριθμοί του διατεταγμένου ζεύγους (a, b) ονομάζονται **συντεταγμένες του διανύσματος** $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Τα διανύσματα $a\vec{u}$, $b\vec{v}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Για κάθε σημείο C του επιπέδου, θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$, το οποίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$.

Ορισμός 1.18. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του σημείου C ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Οι συντεταγμένες (c_1, c_2) του διανύσματος $\overrightarrow{OC}$ ονομάζονται **συντεταγμένες του σημείου C** στο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Δραστηριότητα 1.21 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$, με $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων C, D, E, F ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Η επιλογή ενός σημείου αναφοράς O στο επίπεδο δίδει μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου E^2 και του συνόλου $T_O E^2$ των διανυσμάτων με αρχή στο O ,

$$E^2 \longleftrightarrow T_O E^2,$$

που απεικονίζει το σημείο C στο διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OC}$.

Η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο μας δίδει επιπλέον μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $T_O E^2$ των διανυσμάτων με αρχή στο O και του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$,

$$T_O E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2,$$

που απεικονίζει κάθε διάνυσμα με αρχή στο O στις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα αναφοράς.

Τέλος, η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο δίδει μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου E^2 και του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2$,

$$E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2,$$

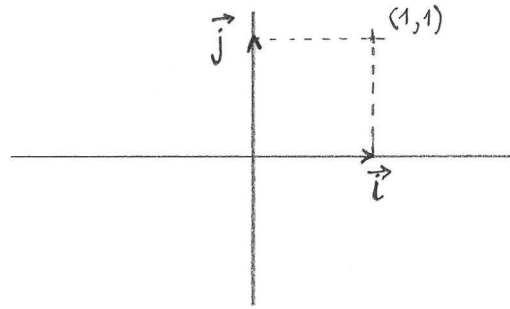
που απεικονίζει κάθε σημείο του επιπέδου στις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα αναφοράς.

Δραστηριότητα 1.22 Για το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ της Δραστηριότητας 1.21, σχεδιάστε τα σημεία με συντεταγμένες $(2, 2)$, $(2, -1)$ και $(-2, 1)$.

Εάν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το $(O, \vec{u}, \vec{v})$ είναι $(-1, 3)$, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{w} - \vec{v}$, $2\vec{w} + \vec{u}$, και σχεδιάστε τα σημεία που έχουν αυτά τα διανύσματα ως διανύσματα θέσης.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε **ορθογώνια** συστήματα αναφοράς, δηλαδή αυτά στα οποία οι δύο άξονες τέμνονται σε ορθή γωνία. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με τα αντίστοιχα **μοναδιαία** διανύσματα, δηλαδή διανύσματα μήκους 1,

$$\vec{i} = \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}, \quad \vec{j} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}.$$



Σχήμα 1.25: Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

Ένα σύστημα αναφοράς με ορθογώνιους άξονες και μοναδιαία διανύσματα ονομάζεται **ορθοκανονικό**, Σχήμα 1.25.

Δραστηριότητα 1.23 Σχεδιάστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου με μήκη πλευρών $|AB| = 3$, $|BC| = 4$ και $|AC| = 5$. Θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{u}, \vec{v})$ με $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Σημειώστε το σημείο D με συντεταγμένες $(1, 1)$ ως προς το $(B, \vec{u}, \vec{v})$.

Θεωρήστε το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που προκύπτουν από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ αντίστοιχα. Σημειώστε το σημείο E με συντεταγμένες $(1, 1)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$. Βρείτε τις συντεταγμένες του D ως προς το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$.

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει ότι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς σχετίζονται με το εσωτερικό γινόμενο.

Λήμμα 1.10 Έστω $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Τότε οι συντεταγμένες (a, b) ενός διανύσματος $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{w}$ με τα αντίστοιχα διανύσματα του συστήματος αναφοράς:

$$a = \vec{w} \cdot \vec{i}, \quad b = \vec{w} \cdot \vec{j}$$

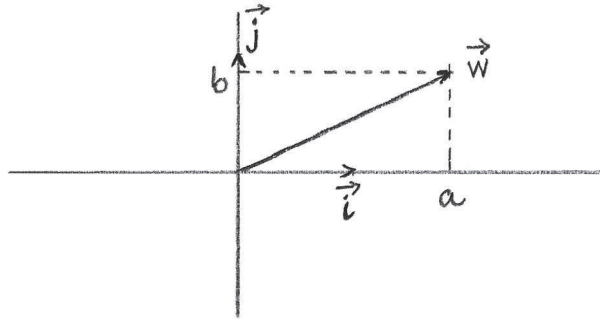
Απόδειξη. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$. Υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα, Σχήμα 1.26,

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{i} &= (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \vec{i} \\ &= a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{i} \\ &= a \end{aligned}$$

και παρόμοια,

$$\vec{w} \cdot \vec{j} = b.$$

□



Σχήμα 1.26: Συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με σημείο εφαρμογής στο O και συντεταγμένες $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ αντίστοιχα (δηλαδή $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ και $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$). Τότε το άθροισμα $\vec{u} + \vec{v}$ έχει συντεταγμένες $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, δηλαδή

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1) \vec{i} + (u_2 + v_2) \vec{j},$$

και εάν $a \in \mathbb{R}$, το γινόμενο $a \vec{u}$ έχει συντεταγμένες (au_1, au_2) , δηλαδή

$$a \vec{u} = au_1 \vec{i} + au_2 \vec{j}.$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}) \\ &= u_1 v_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 v_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + u_2 v_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + u_2 v_2 \vec{j} \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Αλλά $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, άρα

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$ είναι

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ &= \sqrt{(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j})} \\ &= \sqrt{u_1^2 \vec{i} \cdot \vec{i} + u_1 u_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + u_2 u_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + u_2^2 \vec{j} \cdot \vec{j}} \\ &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 1.24 Για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$, τα σημεία D, E και το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$ της Δραστηριότητας 1.23, υπολογίστε:

α'. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, 2\vec{u} + \vec{v}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$,

β'. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$,

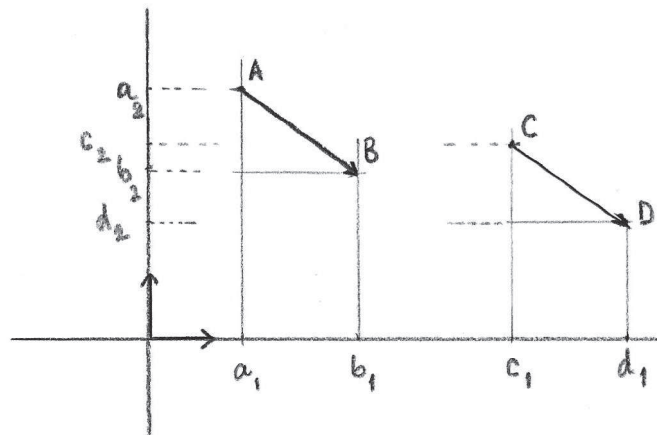
γ'. το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BD}$.

Συντεταγμένες ελεύθερου διανύσματος

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και σημεία A, B, C, D με συντεταγμένες $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ και (d_1, d_2) αντίστοιχα, Σχήμα 1.27. Εάν $\vec{AB} \sim \vec{CD}$, τότε, από τα ίσα τρίγωνα ABM και CDN προκύπτει ότι

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{και} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \quad (1.2)$$

Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $v_1 = b_1 - a_1$ και $v_2 = b_2 - a_2$ δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο αντιπρόσωπο $\vec{AB}$, αλλά χαρακτηρίζουν το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{v} = \vec{AB}$.



Σχήμα 1.27: Οι συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος δεν εξαρτώνται από τον αντιπρόσωπο.

Ορισμός 1.19. Συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος $\vec{v}$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι οι αριθμοί

$$v_1 = b_1 - a_1 \quad \text{και} \quad v_2 = b_2 - a_2,$$

όπου (a_1, a_2) είναι οι συντεταγμένες της αρχής A και (b_1, b_2) είναι οι συντεταγμένες του πέρατος B κάποιου αντιπροσώπου $\vec{AB}$ του $\vec{v}$.

Εάν $v_1 \neq 0$, ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{v}$ τον αριθμό $\lambda = \frac{v_2}{v_1}$.

Από τις εξισώσεις (1.2) βλέπουμε ότι δύο ελεύθερα διανύσματα είναι ίσα εάν και μόνον εάν οι συντεταγμένες τους είναι μία προς μία ίσες.

Δραστηριότητα 1.25 Για το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ της Δραστηριότητας 1.23, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{EC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DC}$. Σημειώστε το σημείο F για το οποίο $\vec{EF}$ έχει συντεταγμένες $(2, 3)$.