

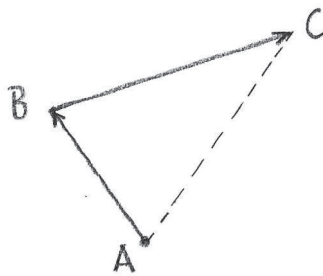
Διάλεξη 2

Ελεύθερα διανύσματα

Στηριζόμενοι στην αρχή ότι “προσθέτουμε ομοειδή αντικείμενα”, μέχρι τώρα περιοριστήκαμε να ορίσουμε τις πράξεις σε διανύσματα με ένα κοινό σημείο εφαρμογής, το O . Αν όμως στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού προβληματίζει η πρόσθεση 2 μήλα + 3 πορτοκάλια, αργότερα το πρόβλημα ξεπεράστηκε, βάζοντας “μήλα” και “πορτοκάλια” στην κοινή κατηγορία “φρούτα”. Κάτι ανάλογο θα κάνουμε τώρα, ώστε να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Ας δούμε πρώτα κάποια φυσικά προβλήματα στα οποία χρειάζεται να συνθέσουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

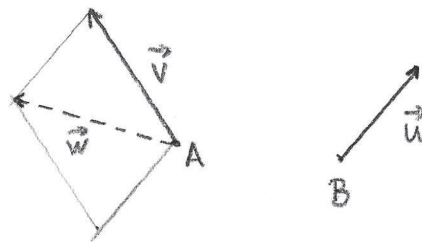
Παράδειγμα 1.1 Μία φυσική ερμηνεία των διανυσμάτων είναι η μετατόπιση, Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12: Σύνθεση μετατοπίσεων.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ περιγράφει τη μετατόπιση ενός αντικείμενου από το σημείο A στο σημείο B . Εάν κατόπιν το αντικείμενο μετατοπισθεί από το B στο C , θα θέλαμε να μπορούμε να εκφράσουμε τη συνολική μετατόπιση ως σύνθεση των μετατοπίσεων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$, δηλαδή ως το “άθροισμα” $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, αλλά τα δύο διανύσματα δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

Παράδειγμα 1.2 Μία άλλη φυσική ερμηνεία των διανυσμάτων είναι η ταχύτητα. Το διά-



Σχήμα 1.13: Σχετική ταχύτητα του A ως προς το B .

νυσμα $\vec{v}$ με σημείο εφαρμογής A παριστάνει την ταχύτητα ενός αντικειμένου τη στιγμή που βρίσκεται στο σημείο A . Εάν ένα άλλο αντικείμενο την ίδια στιγμή βρίσκεται στο σημείο B και κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$, η σχετική ταχύτητα του A ως προς το B φυσιολογικά δίδεται από τη διαφορά των ταχυτήτων, $\vec{v} - \vec{u}$, Σχήμα 1.13. Πάλι, χρειάζεται να συνθέσουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Παράδειγμα 1.3 Μία τρίτη φυσική έννοια που παριστάνεται με διανύσματα είναι η δύναμη. Η δύναμη $\vec{F}_1$ δρά σε ένα στερεό σώμα στο σημείο A , ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ δρά στο σημείο B . Ποιό θα είναι το συνολικό αποτέλεσμα, η συνισταμένη δύναμη; Θα θέλαμε αυτό να εκφράζεται με κάποιο τρόπο από το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Σε αυτές τις περιπτώσεις θέλουμε να εξετάσουμε διανύσματα χωρίς να λαμβάνουμε υπ' όψιν το ακριβές σημείο στο οποίο εφαρμόζονται. Για να πετύχουμε αυτό ορίζουμε μία καινούργια έννοια, το ελεύθερο διάνυσμα.

Ορισμός 1.7. Το **ελεύθερο διάνυσμα** που αντιστοιχεί στο εφαρμοστό γεωμετρικό διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα με το $\vec{u}$, δηλαδή που προκύπτουν από το $\vec{u}$ με παράλληλη μεταφορά.

Προς το παρόν θα συμβολίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ με $[\vec{u}]$, δηλαδή

$$[\vec{u}] = \{\vec{z} \text{ διάνυσμα στο επίπεδο, τέτοιο ώστε } \vec{z} \sim \vec{u}\}.$$

Έτσι, το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ είναι **ίσο** με το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{v}$ εάν και μόνον εάν το $\vec{u}$ προκύπτει από το $\vec{v}$ με παράλληλη μεταφορά,

$$[\vec{u}] = [\vec{v}] \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad \vec{u} \sim \vec{v}.$$

Από το Λήμμα 1.2 γνωρίζουμε ότι εάν δύο διανύσματα είναι ισοδύναμα με ένα τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα, και συνεπώς εάν $[\vec{u}] = [\vec{v}]$ και $[\vec{v}] = [\vec{w}]$, τότε $[\vec{u}] = [\vec{w}]$, όπως θα περιμέναμε.

Δραστηριότητα 1.11 Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$. Ποιές από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς για εφαρμοστά διανύσματα; Είναι η ισότητα (β') αληθής για ελεύθερα διανύσματα;

$$\alpha'. \quad \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}, \quad \beta'. \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \quad \gamma'. \quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}.$$

Πράξεις με ελεύθερα διανύσματα

Για να προσθέσουμε ελεύθερα διανύσματα χρησιμοποιούμε **αντιπροσώπους** των συνόλων, με κοινό σημείο εφαρμογής. Αυτή η ιδέα δεν είναι τόσο παράξενη όσο ίσως φαίνεται αρχικά. Το ίδιο πράγμα κάνουμε όταν προσθέτουμε κλάσματα: Ένας ρητός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σύνολο κλασμάτων που τον παριστάνουν, για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{342}{684}$ όλα παριστάνουν τον ίδιο ρητό αριθμό. Για να προσθέσουμε $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους

που ταιριάζουν καλύτερα, σε αυτή την περίπτωση αυτούς που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, και γράφουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Ανάλογα, για να προσθέσουμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους που ταιριάζουν καλύτερα, δηλαδή που έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

Θεωρούμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$. Στο σημείο O έχουμε $\overrightarrow{OA} \sim \vec{u}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \vec{v}$. Προσθέτουμε τα εφαρμοστά διανύσματα, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Ορίζουμε το **άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων** $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ να είναι το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{OC}$,

$$\begin{aligned} [\vec{u}] + [\vec{v}] &= [\overrightarrow{OC}] \\ &= [\vec{w}]. \end{aligned}$$

Ορίζουμε το πολλαπλάσιο του ελεύθερου διανύσματος $[\vec{u}]$ με τον πραγματικό αριθμό a να είναι το ελεύθερο διάνυσμα $[a\overrightarrow{OA}]$,

$$\begin{aligned} a[\vec{u}] &= [a\overrightarrow{OA}] \\ &= [a\vec{u}]. \end{aligned}$$

Όταν χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους για να ορίσουμε μία πράξη πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί. Ας δούμε ξανά το άθροισμα των ρητών αριθμών $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Θα μπορούσαμε αντί για τους αντιπροσώπους $\frac{3}{6}$ και $\frac{2}{6}$ να χρησιμοποιήσουμε τους αντιπροσώπους $\frac{342}{684}$ και $\frac{228}{684}$, και να υπολογίσουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{342}{684} + \frac{228}{684} = \frac{570}{684}$. Για να είναι λογικό να ορίσουμε την πρόσθεση ρητών αριθμών με αυτό τον τρόπο πρέπει το τελικό αποτέλεσμα να μην εξαρτάται από τους αντιπροσώπους που χρησιμοποιώ για να υπολογίσω το συγκεκριμένο κλάσμα, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $\frac{5}{6} = \frac{570}{684}$. Αυτό μπορούμε εύκολα να το ελέγξουμε. Και γενικότερα, εάν τα κλάσματα $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ και $\frac{s}{q} = \frac{s'}{q'}$, τότε ισχύει $\frac{p+s}{q} = \frac{p'+s'}{q'}$. Λέμε ότι η πρόσθεση ρητών αριθμών είναι **καλά ορισμένη** μέσω της πρόσθεσης κλασμάτων με κοινό παρονομαστή.

Σε πολλές περιπτώσεις στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο: ορίζουμε νέα μαθηματικά αντικείμενα ως σύνολα “ισοδύναμων” αντικειμένων, και ορίζουμε τις πράξεις μεταξύ των νέων αντικειμένων χρησιμοποιώντας αντιπροσώπους από αυτά τα σύνολα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση πρέπει να ελέγξουμε ότι η πράξη που προσπαθούμε να ορίσουμε είναι **καλά ορισμένη**, δηλαδή το τελικό αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους που επιλέγουμε. Περισσότερα για αυτό το ζήτημα θα δείτε στο μάθημα “Θεμέλια των Μαθηματικών”.

Και στην περίπτωση των πράξεων με ελεύθερα διανύσματα, πρέπει να ελέγξουμε ότι είναι **καλά ορισμένες**, δηλαδή ότι το ελεύθερο διάνυσμα που παίρνουμε ως αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους συγκεκριμένους αντιπροσώπους που επιλέξαμε, $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Αυτό ισχύει, και η επαλήθευση βασίζεται στις ιδιότητες της παράλληλης μεταφοράς. Ας δούμε την περίπτωση του αθροίσματος.

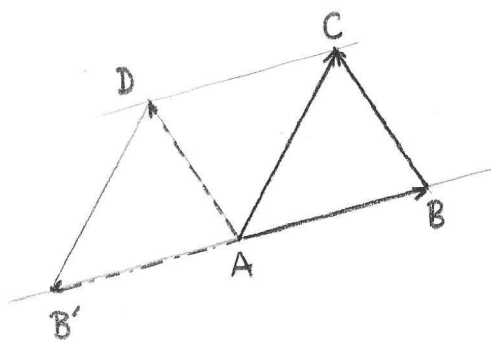
Εάν επιλέξουμε αντιπροσώπους με ένα άλλο σημείο εφαρμογής, $\overrightarrow{OA'}$ και $\overrightarrow{OB'}$, τότε $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{OA'}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{OB'}$, και από το Λήμμα 1.4, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}] + [\vec{v}]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου εφαρμογής. Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι ο πολλαπλασιασμός με αριθμό είναι καλά ορισμένος.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε όλα τα διανύσματα που χρησιμοποιούμε ως ελεύθερα διανύσματα, εκτός εάν αναφέρεται ρητά το αντίθετο. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, και να ακολουθήσουμε τη συνήθη μαθηματική πρακτική, θα παραλείπουμε τις αγκύλες [], και θα συμβολίζουμε με $\vec{u}$ ή $\vec{AB}$ το ελεύθερο διάνυσμα ή οποιοδήποτε γεωμετρικό διάνυσμα ισοδύναμο με το $\vec{u}$ ή το $\vec{AB}$.

Παράδειγμα 1.4 Σχεδιάζουμε τρία σημεία A, B, C και τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$, Σχήμα 1.14. Η διαφορά $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{AB'}$ είναι το διάνυσμα $\vec{AD}$. Αλλά αφού $CDB'A$ είναι παραλληλόγραμμο και $B'ABA$ είναι (εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο, από την Πρόταση 1.1, $CDAB$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Άρα τα διανύσματα $\vec{BC}$ και $\vec{AD}$ είναι ισοδύναμα. Συμπεραίνουμε ότι, ως ελεύθερα διανύσματα,

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}.$$

Αυτή η σχέση μας επιτρέπει να εκφράζουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{u}$ ως διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή, και πέρατα το πέρας και την αρχή του $\vec{u}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.14: Το διάνυσμα $\vec{BC}$ ως διαφορά των $\vec{AC}$ και $\vec{AB}$.

Δραστηριότητα 1.12 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D στις κορυφές ενός τετραγώνου, και το O στο κέντρο του τετραγώνου. Εάν $\vec{u} = \vec{OA}$ και $\vec{w} = \vec{OB}$, εκφράστε τα $\vec{OC}, \vec{OD}, \vec{AB}, \vec{BC}$ και $\vec{BD}$ ως αθροίσματα ή διαφορές των $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

Γραμμικοί συνδυασμοί, γραμμική ανεξαρτησία

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ποια διανύσματα μπορούμε να πάρουμε όταν εφαρμόσουμε τις πράξεις που έχουμε ορίσει σε ένα δεδομένο σύνολο διανυσμάτων.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα, εφαρμόζοντας τον πολλαπλασιασμό με αριθμό παίρνουμε υποχρεωτικά διανύσματα συγγραμμικά με το δοθέν. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλα τα συγγραμμικά διανύσματα.

Πρόταση 1.5 Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι συγγραμμικά διανύσματα, και $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

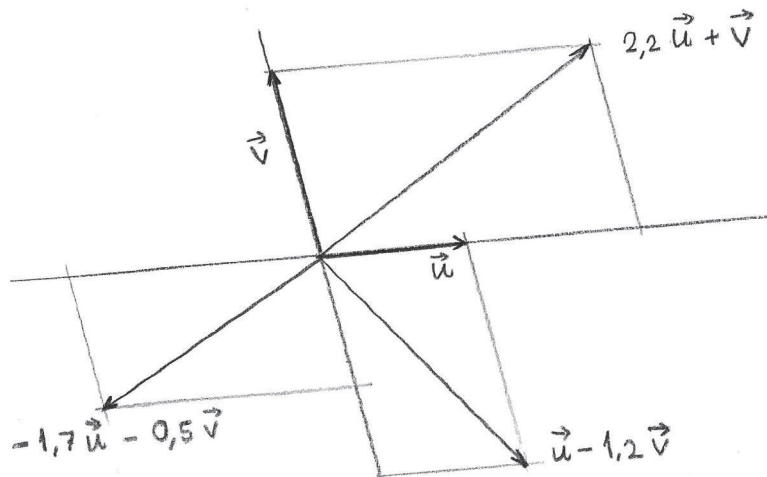
$$\vec{v} = a\vec{u}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι συγγραμμικά, τα σημεία O, A, B βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και αφού $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό, $|OA| \neq 0$. Έστω a ο λόγος των μηκών των $\vec{v}$ και $\vec{u}$, $a = \frac{|OB|}{|OA|}$. Τότε, εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι ομόρροπα, $\vec{v} = a\vec{u}$, ενώ εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα, $\vec{v} = -a\vec{u}$.

□

Εάν έχουμε δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, από την Πρόταση 1.5, $\vec{v} = a\vec{u}$ και $\vec{u} + \vec{v} = (1 + a)\vec{u}$. Συνεπώς όλα τα διανύσματα που παίρνουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό είναι επίσης συγγραμμικά.

Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά, τότε έχουμε περισσότερες δυνατότητες, (Σχήμα 1.15). Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε κάθε διάνυσμα του επιπέδου εφαρμόζοντας τις πράξεις στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

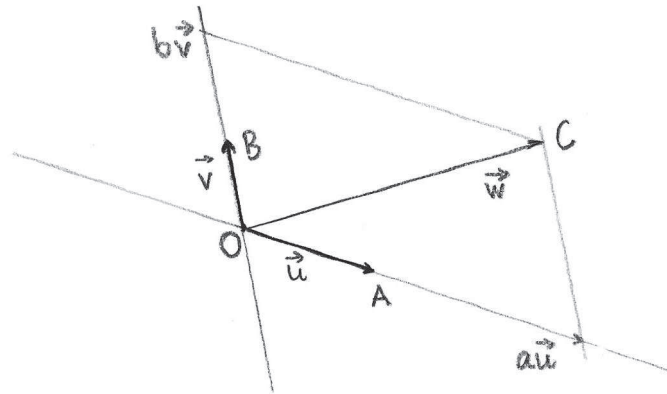


Σχήμα 1.15: Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων.

Πρόταση 1.6 Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{w}$ του επιπέδου, με αρχή στο O , $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, τα σημεία O, A, B δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Από το άκρο C του $\vec{w}$, φέρουμε παράλληλο προς την OB , (Σχήμα 1.16), και αυτή τέμνει την ευθεία OA στο A' . Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA'}$ είναι συγγραμμικό



Σχήμα 1.16: Ανάλυση διανύσματος σε γραμμικό συνδυασμό.

με το $\vec{u}$, και από την Πρόταση 1.5, $\overrightarrow{OA'} = a\vec{u}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Παρόμοια, φέρουμε από το C παράλληλο προς την OA , η οποία τέμνει την OB στο B' , και $\overrightarrow{OB'} = b\vec{v}$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$. Από την κατασκευή, το τετράπλευρο $OA'CB'$ είναι παραλληλόγραμμο, και συνεπώς

$$\begin{aligned}\vec{w} = \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} \\ &= a\vec{u} + b\vec{v}.\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.8. Εάν $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ είναι διανύσματα, με αρχή στο O , ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ένα διάνυσμα εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ εάν μπορούμε να το κατασκευάσουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό στα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$. Στην Πρόταση 1.6 δείξαμε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο δοθέντων μη συγγραμμικών διανυσμάτων.

Όταν εξετάζουμε μια συλλογή διανυσμάτων, συχνά μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε εάν κάποιο από τα διανύσματα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Εάν συμβαίνει αυτό, θεωρούμε ότι η συλλογή περιέχει, με κάποια έννοια, περιττά στοιχεία. Αυτή την έννοια αποτυπώνει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.9. Λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, είναι **γραμμικά εξαρτημένα** εάν κάποιο από αυτά μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή εάν υπάρχει κάποιο i , $1 \leq i \leq n$, και πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{u}_i = a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_{i-1} \vec{u}_{i-1} + a_{i+1} \vec{u}_{i+1} + \dots + a_n \vec{u}_n$$

Εάν τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, λέμε ότι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα μόνον όταν έχουμε περισσότερα από ένα διανύσματα στη συλλογή. Συμπληρώνουμε τον ορισμό για την περίπτωση ενός διανύσματος, λέγοντας ότι το διάνυσμα $\vec{u}_1$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν είναι μηδενικό, και γραμμικά ανεξάρτητο εάν δεν είναι μηδενικό.

Οι Προτάσεις 1.5 και 1.6 δείχνουν ότι κάθε συλλογή που περιέχει δύο συγγραμμικά διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένη, και κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από δύο διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Παρατηρούμε ότι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και κάθε άλλο διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων. Ένα ζεύγος διανυσμάτων με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **βάση** των διανυσμάτων του επιπέδου.

Δραστηριότητα 1.13 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Εκφράστε τα $\vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

Άξονας, προσημασμένο μέτρο διανύσματος

Ορισμός 1.10. Άξονα ονομάζουμε μία ευθεία ε στην οποία έχουμε επιλέξει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ με φορέα ε . Η επιλογή του $\vec{v}$ καθορίζει έναν **προσανατολισμό** πάνω στην ε και στα διανύσματα που έχουν φορέα ε : τα διανύσματα που είναι ομόρροπα με το $\vec{v}$ έχουν θετικό προσανατολισμό, ενώ τα διανύσματα που είναι αντίρροπα προς το $\vec{v}$ έχουν αρνητικό προσανατολισμό.

Εάν $\vec{w}$ είναι διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{v}$, ονομάζουμε **προσημασμένο μέτρο** (ή **αλγεβρική τιμή**) του $\vec{w}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$ τον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{w} = \frac{a}{|\vec{v}|} \vec{v}.$$

Παρατηρούμε ότι $|a| = |\vec{w}|$, και εάν $\vec{w}$ δεν είναι μηδενικό, τότε $a > 0$ εάν $\vec{w}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$, ενώ $a < 0$ εάν $\vec{w}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{v}$. Το προσημασμένο μέτρο του διανύσματος $\vec{OB}$ συμβολίζουμε (OB) . Δεν θα χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $(\vec{u})$ για το προσημασμένο μέτρο του $\vec{u}$, καθώς αυτός ο συμβολισμός μπορεί να παρερμηνευτεί.

Λήμμα 1.7 (Κανόνας του Chasles) Εάν A, B, C είναι συγγραμμικά σημεία πάνω σε άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, τότε

$$(AB) + (BC) = (AC).$$

Δραστηριότητα 1.14 Σημειώστε τρία σημεία A, C, B πάνω σε μία ευθεία ε , έτσι ώστε το C να βρίσκεται μεταξύ του A και του B . Επιλέξτε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ με φορά την ε , και χρησιμοποιήστε το για να ορίσετε προσανατολισμό. Μετρήστε το μήκος των διανυσμάτων, υπολογίστε τα προσημασμένα μέτρα $(AB), (BC), (AC)$ και ελέγξτε ότι $(AB) + (BC) = (AC)$.

Εάν χρησιμοποιήσετε τον αντίθετο προσανατολισμό, όλα τα μέτρα αλλάζουν πρόσημο, άρα η ισότητα διατηρείται.

Απλός λόγος τριών σημείων

Ο απλός λόγος είναι ένας πραγματικός αριθμός $\mu \neq -1$, ο οποίος περιγράφει τη σχετική θέση τριών διαφορετικών σημείων πάνω σε μία ευθεία.

Ορισμός 1.11. Θεωρούμε τρία σημεία P_1, P_2, P πάνω σε μία ευθεία. Τα διανύσματα $\overrightarrow{P_1P}$ και $\overrightarrow{PP_2}$ είναι συγγραμμικά, και εάν $P \neq P_2$ υπάρχει ένας αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{P_1P} = \mu \overrightarrow{PP_2}.$$

Ο αριθμός μ ονομάζεται **απλός λόγος** των τριών σημείων, και συμβολίζεται $(P_1 P_2 P)$.

Παρατηρούμε ότι $(P_1 P_2 P) = \frac{(P_1P)}{(PP_2)}$, και ότι η αλλαγή του προσανατολισμού της ευθείας δεν επηρεάζει τον απλό λόγο. Εάν θεωρήσουμε τα P_1, P_2 σταθερά, και το P να κινείται πάνω στην ευθεία, η τιμή του απλού λόγου μεταβάλλεται όπως στο Σχήμα 1.17.



Σχήμα 1.17: Η τιμή του απλού λόγου καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην ευθεία P_1P_2 .

Δραστηριότητα 1.15 Για τα σημεία A, B, C της Δραστηριότητας 1.14 υπολογίστε τους απλούς λόγους $(ABC), (BCA)$ και (CAB) .

Δραστηριότητα 1.16 Σημειώστε δύο σημεία P_1 και P_2 πάνω σε μία ευθεία ε . Βρείτε σημεία R, S, T πάνω στην ε τέτοια ώστε $(P_1 P_2 R) = 2$, $(P_1 P_2 S) = -\frac{1}{4}$ και $(P_2 P_1 T) = -\frac{1}{4}$.