

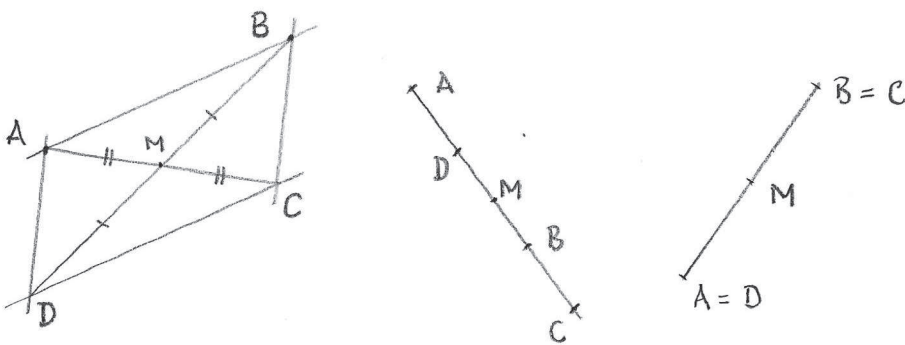
Διάλεξη 1

Παραλληλόγραμμο στο ευκλείδειο επίπεδο

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου γνωρίζουμε ότι ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ είναι ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D και τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA , τέτοια ώστε η ευθεία AB είναι παράλληλη προς την ευθεία DC και η ευθεία BC είναι παράλληλη προς την ευθεία AD . Γνωρίζουμε επίσης ότι $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο εάν και μόνον εάν οι διαγωνίες AC και BD διχοτομούνται.

Σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιήσουμε ως ορισμό ενός παραλληλογράμμου αυτή την ιδιότητα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ταυτόχρονα την περίπτωση που τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA βρίσκονται σε διαφορετικές παράλληλες ευθείες (γνήσιο παραλληλόγραμμο) καθώς και τις εκφυλισμένες περιπτώσεις όπου τα τέσσερα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Ορισμός 1.1. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D και τα τμήματα των ευθειών AB, BC, CD και DA που τα συνδέουν, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD , (Σχήμα 1.1). Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA είναι οι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABCD$, ενώ τα σημεία A, B, C, D είναι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $ABCD$.



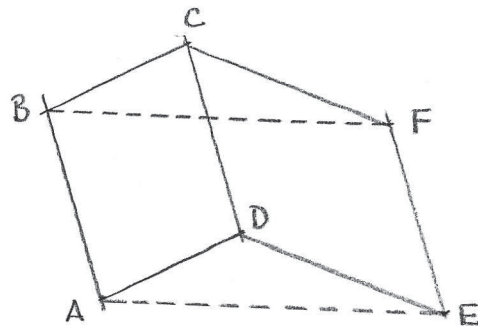
Σχήμα 1.1: Παραλληλόγραμμο.

Τα σύμβολα $ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD . Παρατηρήστε ότι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν $A = B$ και $C = D$.

Δραστηριότητα 1.1 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C που να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα μπορείτε να σχεδιάσετε που να έχουν τα σημεία A, B, C ως τρεις από τις κορυφές τους (όχι υποχρεωτικά με αυτή τη σειρά); Προσπαθήστε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό.

Από αυτόν τον ορισμό μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες των παραλληλογράμων. Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1 Εάν τα σχήματα $ABCD$ και $CDEF$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε παραλληλόγραμμο είναι και το σχήμα $ABFE$.



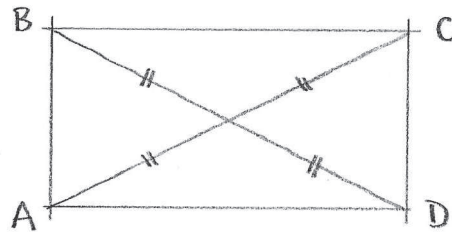
Σχήμα 1.2: Πρόταση 1.1.

Θα ορίσουμε επίσης το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό θα μας επιτρέψει να μιλήσουμε για ευθείες που τέμνονται κάθετα, πριν δώσουμε το γενικό ορισμό της γωνίας μεταξύ δύο ευθειών.

Ορισμός 1.2. Ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ ονομάζεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** εάν το μήκος της διαγωνίου AC είναι ίσο με το μήκος της διαγωνίου BD . Σε ένα μη εκφυλισμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι ευθείες που περιέχουν τις πλευρές AB και AD λέμε ότι είναι **κάθετες** ή ότι σχηματίζουν **ορθή γωνία**.

Δραστηριότητα 1.2 Πότε είναι ένα εκφυλισμένο παραλληλόγραμμο “ορθογώνιο” σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό; Μπορούμε σε αυτή την περίπτωση να μιλήσουμε για κάθετες ευθείες;

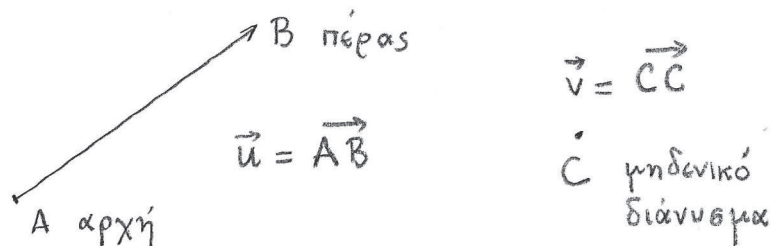
Δραστηριότητα 1.3 Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABCD$. Είναι κάποιο από τα άλλα παραλληλόγραμμα με κορυφές A, B, C (όπως στη Δραστηριότητα 1.1) ορθογώνιο;



Σχήμα 1.3: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο.

Ένα **γεωμετρικό διάνυσμα** είναι ένα βέλος, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, και ονομάζουμε το ένα **αρχή** και το άλλο **πέρας**, (Σχήμα 1.4). Θεωρούμε επίσης **μηδενικά διανύσματα**, στα οποία η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Χρησιμοποιούμε γράμματα του λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένα με βέλος για να συμβολίσουμε διανύσματα: $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...



Σχήμα 1.4: Διανύσματα.

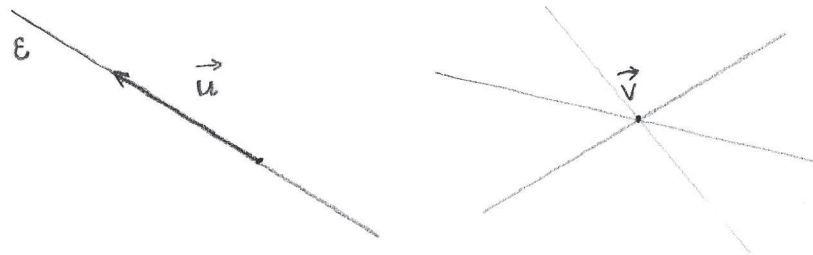
Αρχικά θα εξετάσουμε γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο, δηλαδή βέλη που εφάπτονται στην επιφάνεια ενός επιπέδου. Το σημείο του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται η αρχή του διανύσματος το ονομάζουμε **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος. (Τα γεωμετρικά διανύσματα ονομάζονται επίσης **εφαρμοστά διανύσματα**, ή **εφαπτόμενα διανύσματα**).

Εάν η αρχή του γεωμετρικού διανύσματος $\vec{u}$ βρίσκεται στο σημείο A και το πέρας του βρίσκεται στο σημείο B του επιπέδου, συμβολίζουμε εναλλακτικά το διάνυσμα με $\overrightarrow{AB}$. Το μηδενικό διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το A , το συμβολίζουμε $\overrightarrow{AA}$. Προσέξτε ότι έχουμε ένα διαφορετικό μηδενικό γεωμετρικό διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου.

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε **μέτρο** (ή **μήκος**) του διανύσματος $\vec{u}$ την απόσταση μεταξύ

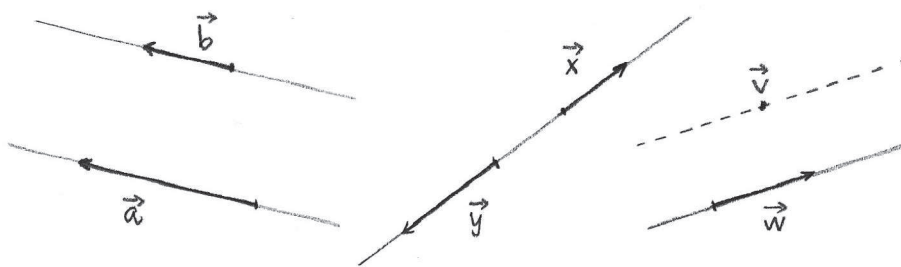
των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος AB . Το μέτρο του $\vec{u}$ συμβολίζεται $|\vec{u}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= |AB| \\ &= \text{απόσταση από το } A \text{ στο } B. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.5: Φορέας διανύσματος.

Εάν $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το $\vec{u}$, η οποία ονομάζεται **φορέας** του $\vec{u}$, (Σχήμα 1.5). Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο εφαρμογής του.



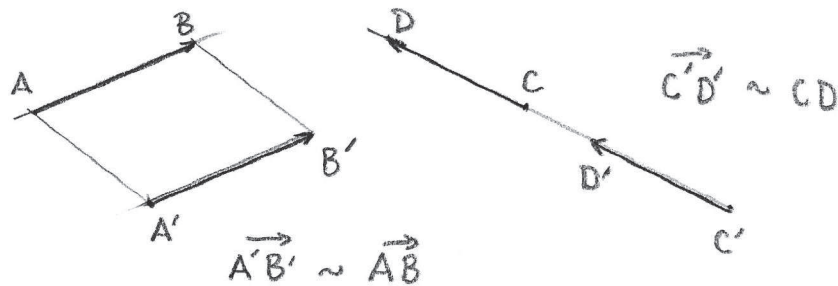
Σχήμα 1.6: Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα.

Δύο διανύσματα που έχουν το ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**, (Σχήμα 1.6). Προσέξτε ότι δεν διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις, και ο όρος συγγραμμικά χρησιμοποιείται τόσο όταν τα διανύσματα βρίσκονται στην ίδια ευθεία όσο και όταν βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες. Παρατηρούμε ότι ένα μηδενικό διάνυσμα είναι παράλληλο προς οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου. Όταν δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι παράλληλα λέμε ότι έχουν την **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Παράλληλη μεταφορά

Μία σημαντική ιδιότητα των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο είναι ότι μπορούμε να τα μεταφέρουμε παράλληλα. Η διαισθητική έννοια είναι ότι μετακινούμε το διάνυσμα σε ένα άλλο σημείο εφαρμογής, χωρίς να το περιστρέψουμε.

Ορισμός 1.3. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, και ένα σημείο A' του επιπέδου, (Σχήμα 1.7). Λέμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με **παράλληλη μεταφορά** του $\overrightarrow{AB}$ στο A' , εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο. Εάν το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$ προκύπτει από το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με παράλληλη μεταφορά, λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι **ισοδύναμα**, και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Όλα τα μηδενικά διανύσματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.



Σχήμα 1.7: Παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων.

Παρατηρήστε ότι εάν το A' βρίσκεται στο φορέα του $\overrightarrow{AB}$, τότε το παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ είναι εκφυλισμένο και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ έχουν τον ίδιο φορέα.

Μία απλή αλλά σημαντική συνέπεια της Πρότασης 1.1 είναι ότι εάν δύο διανύσματα είναι ισοδύναμα με ένα τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα. Πιο συγκεκριμένα:

Λήμμα 1.2 Εάν το διάνυσμα $\vec{u}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{v}$, και το $\vec{w}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{u}$, τότε το $\vec{w}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{v}$,

$$\vec{v} \sim \vec{u} \text{ και } \vec{u} \sim \vec{w} \implies \vec{v} \sim \vec{w}.$$

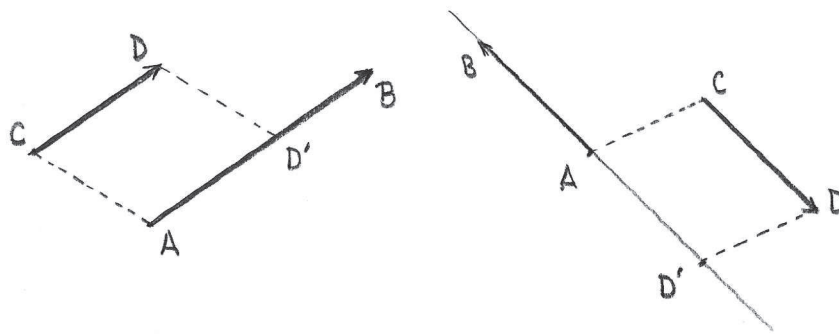
Δραστηριότητα 1.4 Σημειώστε τέσσερα τυχαία σημεία A, B, C, D στο επίπεδο (λέγοντας ‘τυχαία’ εδώ εννοούμε ότι είναι όλα διαφορετικά, και τα διανύσματα που σχηματίζονται με αρχή σε ένα από τα 4 σημεία και πέρας σε ένα άλλο από αυτά δεν είναι παράλληλα και έχουν όλα διαφορετικά μέτρα).

α’. Καταγράψτε όλα (τα 16) διαφορετικά διανύσματα με άκρα στα σημεία A, B, C, D .

β’. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{CE}$ που είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{AB}$. Σχεδιάστε και το $\overrightarrow{DF} \sim \overrightarrow{AC}$.

Ομόρροπα διανύσματα

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα καθορίζει μία φορά, έναν προσανατολισμό, πάνω στο φορέα του.



Σχήμα 1.8: Ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα.

Ορισμός 1.4. Θεωρούμε δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ και μεταφέρουμε παράλληλα το $\overrightarrow{CD}$ στο $\overrightarrow{AD'}$, (Σχήμα 1.8).

α’. Εάν το σημείο D' βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B , λέμε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι **ομόρροπα**, ή ότι **έχουν την ίδια φορά**

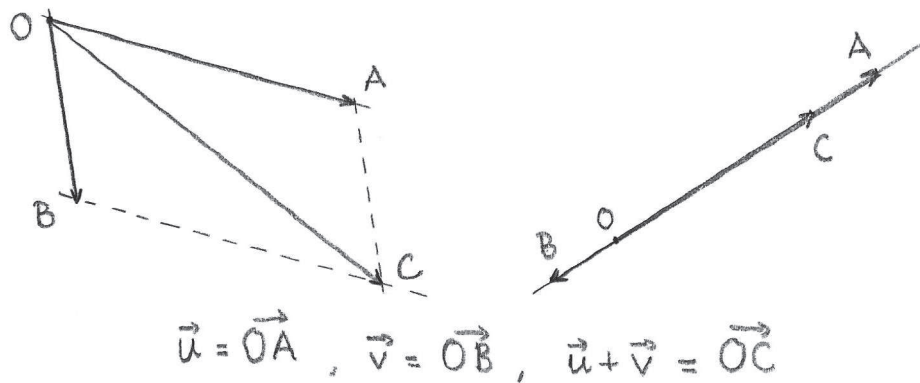
β’. Εάν το σημείο D' δεν βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B , λέμε ότι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι **αντίρροπα**, ή ότι **έχουν αντίθετη φορά**

Δραστηριότητα 1.5 Σχεδιάστε ένα (γνήσιο) παραλληλόγραμμο $ABCD$ και καταγράψτε τα 12 μη μηδενικά διανύσματα με άκρα στις κορυφές του παραλληλογράμμου. Βρείτε δύο ζεύγη τέτοιων διανυσμάτων που είναι παράλληλα και ομόρροπα. Βρείτε δύο ζεύγη τέτοιων διανυσμάτων που είναι παράλληλα και αντίρροπα.

Πράξεις με διανύσματα

Σε αυτήν και τις επόμενες παραγράφους θα δούμε πώς μπορούμε να ορίσουμε πράξεις με διανύσματα. Ο κανόνας του παραλληλόγραμμου για τη σύνθεση δύο κινήσεων ή δύο δυνάμεων είναι γνωστός από την αρχαιότητα. Δίδει μια χρήσιμη πράξη στο σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής.

Αρχικά θα ορίσουμε τις πράξεις μόνο για διανύσματα με το ίδιο σημείο εφαρμογής, (προσθέτουμε ‘ομοειδή’ αντικείμενα), ενώ αργότερα θα δούμε πώς να αποτινάξουμε αυτόν τον περιορισμό. Θεωρούμε λοιπόν ένα σημείο O του επιπέδου, και περιοριζόμαστε σε γεωμετρικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O .



Σχήμα 1.9: Άθροισμα διανυσμάτων.

Ορισμός 1.5. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O , ορίζουμε το **άθροισμα** $\vec{u} + \vec{v}$ να είναι το γεωμετρικό διάνυσμα με αρχή στο O και πέρας στο σημείο C για το οποίο $OACB$ είναι παραλληλόγραμμο, (Σχήμα 1.9).

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι συγγραμμικά, τότε το σημείο C για το οποίο $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$, προσδιορίζεται και από τις σχέσεις $|AC| = |OB|$ και $|BC| = |OA|$.

Δραστηριότητα 1.6 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και θεωρήστε $D, D', \dots$ τις κορυφές των παραλληλογράμμων που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.1. Για κάθε ένα από αυτά τα παραλληλόγραμμα γράψτε το άθροισμα των δύο διανυσμάτων που αντιστοιχούν στις πλευρές του παραλληλογράμμου που έχουν κοινή αρχή στο σημείο A . Για παράδειγμα, εάν $ABCD$ είναι ένα από τα παραλληλόγραμμα, το αντίστοιχο άθροισμα είναι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $\vec{u} + \vec{u}$ έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής και την ίδια φορά με το $\vec{u}$, αλλά διπλάσιο μήκος. Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή την έννοια του πολλαπλασίου, με τρόπο που να είναι συμβατός με την πράξη της πρόσθεσης.

Ορισμός 1.6. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και a είναι πραγματικός αριθμός, $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε το **πολλαπλάσιο** $a\vec{u}$ να είναι το διάνυσμα με σημείο εφαρμογής O , μήκος $|a||\vec{u}|$ και τον ίδιο φορά με το $\vec{u}$, ($|a|$ είναι η απόλυτη τιμή του a). Η φορά του $a\vec{u}$ είναι η ίδια με αυτήν του $\vec{u}$ εάν $a > 0$, και η αντίθετη εάν $a < 0$.

Δραστηριότητα 1.7 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\begin{array}{lll} \alpha') \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, & \beta') \quad 2\overrightarrow{AB}, & \gamma') \quad \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}), \\ \delta') \quad \overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{AB}), & \epsilon') \quad 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, & \zeta') \quad 2\overrightarrow{AC} + (-1\overrightarrow{AB}). \end{array}$$

Η ακόλουθη πρόταση συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε.

Πρόταση 1.3 Θεωρούμε τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ με σημείο εφαρμογής το O , και τους αριθμούς $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha'. \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\beta'. \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\gamma'. \quad \vec{u} + \overrightarrow{OO} = \vec{u}$$

$$\delta'. \quad 1\vec{u} = \vec{u} \text{ και } 0\vec{u} = \overrightarrow{OO}$$

$$\epsilon'. \quad (ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$$

$$\zeta'. \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$\eta'. \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

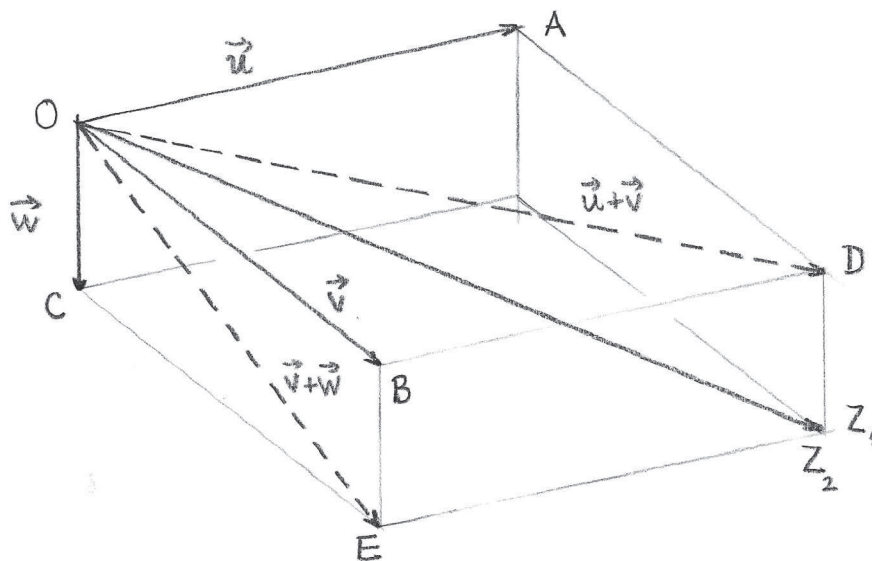
Απόδειξη. Η απόδειξη των περισσότερων ιδιοτήτων είναι απλή. Θα δώσουμε μόνο την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, τότε D, E, Z_1 και Z_2 είναι τα σημεία που προσδιορίζονται από τις ακόλουθες ισότητες, (Σχήμα 1.10):

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} & \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} & \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OZ_2} \end{array}$$

και έχουμε

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{OZ_1}, \quad \text{και} \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OZ_2}.$$

Το σημείο Z_2 χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι το τετράπλευρο OAZ_2E είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς για να δείξουμε ότι $\overrightarrow{OZ_1} = \overrightarrow{OZ_2}$, αρκεί να δείξουμε ότι OAZ_1E είναι επίσης παραλληλόγραμμο, δηλαδή να δείξουμε ότι το μέσο του OZ_1 συμπίπτει με το μέσο του AE . Αλλά ODZ_1C είναι παραλληλόγραμμο, από τον ορισμό του Z_1 , άρα το μέσο του OZ_1 συμπίπτει με το μέσο του CD . Άρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το μέσο του CD συμπίπτει με το μέσο του AE , δηλαδή ότι $ACED$ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά $OCEB$ και $OBDA$ είναι παραλληλόγραμμα, από τον ορισμό των E και D αντίστοιχα. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.1,



Σχήμα 1.10: Η προσεταιριστική ιδιότητα.

$ACED$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

□

Το διάνυσμα $(-1)\vec{u}$ ικανοποιεί τη σχέση $\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{OO}$. Ονομάζεται **αντίθετο** του $\vec{u}$, και συμβολίζεται $-\vec{u}$. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό της αφαίρεσης, $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.

Δραστηριότητα 1.8 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\alpha') \quad \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}, \quad \beta') \quad \overrightarrow{AC} + (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}), \quad \gamma') \quad 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}.$$

Εάν μεταφέρουμε παράλληλα δύο γεωμετρικά διανύσματα με κοινή αρχή, τότε το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν μεταφέρεται στο νέο σημείο εφαρμογής, και το άθροισμά τους, που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, μεταφέρεται επίσης παράλληλα, όπως ελέγχουμε στην ακόλουθη Δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 1.9 Σημειώστε 4 σημεία O, A, B, C και σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ και το άθροισμα $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Μεταφέρετε παράλληλα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ στο σημείο O , δηλαδή σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$ τα οποία είναι ισοδύναμα προς τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ αντίστοιχα, (θα πρέπει να σχηματίζονται παραλληλόγραμμα $ABB'O$ και $ACC'O$). Σχεδιάστε το άθροισμα $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ και ελέγξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{AD}$.

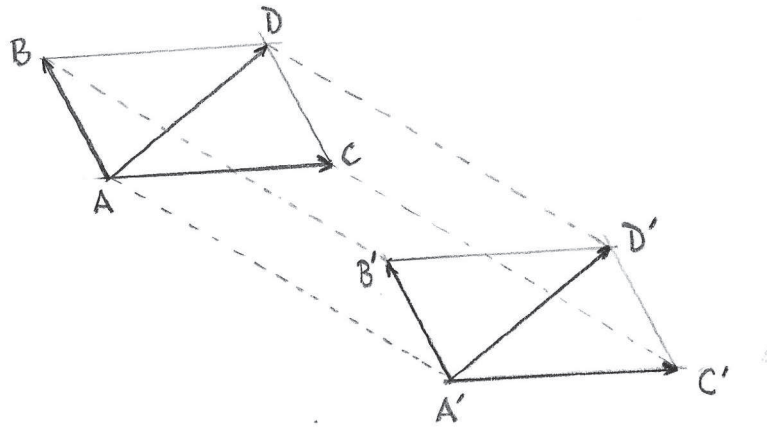
Θα διατυπώσουμε αυτή την παρατήρηση στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.4 Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, εάν $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ και $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$, τότε

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$a \overrightarrow{A'B'} \sim a \overrightarrow{AB}.$$



Σχήμα 1.11: Πρόσθεση και παράλληλη μεταφορά

Απόδειξη. Για την πρόσθεση, (Σχήμα 1.11), αρκεί να δείξουμε ότι εάν $ABB'A'$, $ACC'A'$, $ABDC$ και $A'B'D'C'$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε $ADD'A'$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1, πρώτα στα παραλληλόγραμμα $ABDC$ και $ACC'A'$, για να δείξουμε ότι $BDC'A'$ είναι παραλληλόγραμμο, κατόπιν στα $BDC'A'$ και $A'B'D'C'$ για να δείξουμε ότι $BDD'B'$ είναι παραλληλόγραμμο, και τέλος στα $BDD'B'$ και $ABB'A'$ για να δείξουμε ότι $ADD'A'$ είναι παραλληλόγραμμο. Η απόδειξη για τον πολλαπλασιασμό είναι ανάλογη.

□

Αυτή η ιδιότητα θα μας επιτρέψει να επεκτείνουμε τον ορισμό των πράξεων και μεταξύ διανυσμάτων με διαφορετικό σημείο εφαρμογής, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Δραστηριότητα 1.10 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C , και σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AC}$ που προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $\overrightarrow{BC}$ στο A . Εφαρμόστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρείτε το άθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Τι παρατηρείτε; Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη διαδικασία για να ορίσουμε το άθροισμα δύο διανυσμάτων ακόμα και όταν δεν έχουν την ίδια αρχή;