ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ζ54 Διδακτική της Γεωμετρίας

Υποδείξεις και Απαντήσεις στις Ασκήσεις του Κεφαλαίου 6

Άσκηση 1 Σχεδιάστε τις υ-ευθείες ε_0, ε_{-2}, $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{-3,2}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$.
Ποιές από αυτές είναι ασύμπτωτεςπαράλληλες; Ποιές είναι υπερπαράλληλες;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ασύμπτωτες παράλληλες οι: ε_0 και ε_{-2}, $\varepsilon_{0,1}$ και $\varepsilon_{-3,2}$, $\varepsilon_{0,1}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$.
Υπερπαράλληλες οι: ε_0 και $\varepsilon_{-3,2}$, ε_0 και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$, ε_{-2} και $\varepsilon_{0,1}$, ε_{-2} και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$, $\varepsilon_{-3,2}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}$.

Άσκηση 2 Βρείτε και σχεδιάστε τις υ-ευθείες που περνούν από τα σημεία

α′. i και $2\mathrm{i}$,

β′. i και $\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$,

γ′. $3+2\mathrm{i}$ και $2+5\mathrm{i}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. ε_0,

β′. $\varepsilon_{0,1}$,

γ′. $\varepsilon_{-8,5\sqrt{5}}$.

Άσκηση 3 Βρείτε τα πέρατα των υ-ευθειών στην Άσκηση 2

Άσκηση 4 Σχεδιάστε τις υ-ευθείες με πέρατα $(2, 3)$, $(3, \infty)$, $(-1, 2)$ και $(\infty, -2)$.

Άσκηση 5 Δίδεται η υ-ευθεία $\varepsilon_{2,3}$ και το σημείο $w_0 = 2+\mathrm{i}$. Από το σημείο w_0 υπάρχουν ακριβώς δύο υ-ευθείες ασύμπτωτες παράλληλες στην $\varepsilon_{2,3}$ και άπειρες υ-ευθείες υπερπαράλληλες προς την $\varepsilon_{2,3}$. Βρείτε τα πέρατα των δύο ασύμπτωτων παράλληλων υ-ευθειών, και μία παραμετρική έκφραση για τα πέρατα των υπερπαραλλήλων.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ασύμπτωτες παράλληλες: $(-1, 7/3)$, $(5/3, 5)$.
Υπερπαράλληλες: κέντρο $2/3 < x < 10/3$, ακτίνα $r = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

Δραστηριότητα 5 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι υπερβολικοί μετασχηματισμοί, και ποιές είναι μετασχηματισμοί Möbius;

α′.	$f(z) = 3z + 1$	β′.	$f(z) = -z + 2$
γ′.	$f(z) = \frac{2z+3}{2z+2}$	δ′.	$f(z) = \frac{2\bar{z}+2}{3\bar{z}+1}$
ε′.	$f(z) = \frac{3z+6}{2z+4}$	ϛ′.	$f(z) = \frac{3}{\bar{z}} - 1$
ζ′.	$f(z) = \frac{3}{z} - 1$	η′.	$f(z) = -\frac{3}{z} - 2$
ϑ′.	$f(z) = 2z - \frac{3}{z}$	ι′.	$f(z) = \frac{1}{2z-5}$
ια′.	$f(z) = \frac{1}{2\bar{z}+1}$	ιβ′.	$f(z) = \frac{1}{-2z-2}$

Γράψτε όσους είναι υπερβολικοί μετασχηματισμοί στην κανονική μορφή (a) ή (b), με $ad - bc = 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $f(z) = 3z + 1 = \frac{\sqrt{3}z+1/\sqrt{3}}{0z+1/\sqrt{3}}$ Möbius,

δ′. $f(z) = \frac{2\bar{z}+2}{3\bar{z}+1} = \frac{-1(-\bar{z})+1}{(-3/2)(-\bar{z})+1/2}$ Υπερβολικός μετασχηματισμός,

ϛ′. $f(z) = \frac{3}{\bar{z}} - 1 = \frac{1/\sqrt{3}(-\bar{z})+\sqrt{3}}{-1/\sqrt{3}(-\bar{z})+0}$ Υπερβολικός μετασχηματισμός,

η′. $f(z) = -\frac{3}{z} - 2 = \frac{-2/\sqrt{3}z-\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}z+0}$ Möbius,

ϑ′. Η $f(z)$ μηδενίζεται σε δύο σημεία, άρα δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\overline{\mathcal{H}}$.

Δραστηριότητα 6 Για τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς της Δραστηριότητας 5, βρείτε την εικόνα του ∞ και το σημείο $z \in \partial\mathcal{H}$ που απεικονίζεται στο ∞.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $f(\infty) = \infty$,

δ′. $f(\infty) = 2/3,\ f(-1/3) = \infty$,

ϛ′. $f(\infty) = -1,\ f(0) = \infty$,

η′. $f(\infty) = -2,\ f(0) = \infty$.

Άσκηση 6 Εκφράστε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius ως σύνθεση απεικονίσεων της μορφής $g(z) = z + q\,, q \in \mathbb{R}$, $h(z) = pz\,, p > 0$ ή $k(z) = -\frac{1}{z}$.

α'. $f(z) = 3z - 2$ β'. $f(z) = \frac{-2}{3z+1}$

γ'. $f(z) = \frac{z+1}{-2z+1}$ δ'. $f(z) = \frac{2z-1}{z+3}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') $f = g \circ h$, όπου $h(z) = 3z$, $g(z) = z - 2$.

β') $f = k \circ g \circ h$, όπου $h(z) = 3z/2$, $g(z) = z + 1/2$.

γ') Ο μετασχηματισμός $f(z) = \frac{z+1}{-2z+1}$ γράφεται ως

$$f(z) = \frac{(2z-1)+3}{2(-2z+1)} = \frac{-3}{4z-2} - \frac{1}{2}\,,$$

το οποίο είναι σύνθεση μετασχηματισμών της μορφής g, h και k.

Άσκηση 7 Βρείτε την εικόνα των υ-ευθειών ε_0 και $\varepsilon_{1,1}$ από τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς

α'. $f(z) = 3z - 2$ β'. $f(z) = \frac{2z-2}{z+1}$

γ'. $f(z) = \frac{-2\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$ δ'. $f(z) = \frac{-1}{z}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') $f(0) = -2$, $f(\infty) = \infty$, $f(2) = 4$, άρα $f(\varepsilon_0) = \varepsilon_{-2}$ και $f(\varepsilon_{1,1}) = \varepsilon_{1,3}$.

γ') $f(0) = -1$, $f(\infty) = -2$, $f(2) = -5/3$, άρα $f(\varepsilon_0) = \varepsilon_{-3/2,\,1/2}$ και $f(\varepsilon_{1,1}) = \varepsilon_{-4/3,\,1/3}$.

Άσκηση 8 Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των υ-ευθειών $\varepsilon_{-1,2}$ και $\varepsilon_{2,3}$ (δηλαδή των ημικυκλίων με κέντρο -1 και ακτίνα 2 και με κέντρο 2 και ακτίνα 3).

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το σημείο τομής των δύο υ-ευθειών είναι το

$$z = \frac{-1 + i4\sqrt{2}}{3}\,.$$

Για να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας, χρησιμοποιήστε τον (ευκλείδειο) κανόνα συνημιτόνου στο τρίγωνο $-1\,, 2\,, z$.

Παρατηρήστε οτι δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το σημείο τομής των δύο υ-ευθειών, αφού το μόνο που χρειαζόμαστε για τον κανόνα του συνημιτόνου είναι το μήκος των πλευρών του τριγώνου.

Άσκηση 9 Βρείτε την προσημασμένη γωνία από την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(-1, 3)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σημείο τομής των δύο υ-ευθειών είναι το $z = \mathrm{i}\sqrt{3}$. Η προσημασμένη γωνία από την υ-ημιευθεία (z, ∞) στην υ-ημιευθεία $(z, 3)$ έχει τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Η προσημασμένη γωνία είναι $\varphi = -\pi/3$.

Άσκηση 10 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $0, 1, \infty \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Έστω $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Αφού $f(1) = 0$, $a = b$, αφού $f(-3) = \infty$, $d = 3c$ και αφού $f(2) = 1$, $2a + b = 2c + d$, δηλαδή $a = 5c$. Άρα $f(z) = \frac{5z-5}{z+3}$.

Άσκηση 11 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τα σημεία $1, 2, -3 \in \partial\mathcal{H}$ στα σημεία $2, -3, 1 \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Είναι ο μετασχηματισμός $g \circ f$, όπου f είναι ο μετασχηματισμός της Άσκησης 10 και g είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει τα $0, 1, \infty \in \partial\mathcal{H}$ στα $2, -3, 1 \in \partial\mathcal{H}$ αντίστοιχα, $g(z) = \frac{5z-8}{5z-4}$.

Άσκηση 12 Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(1, 3)$.
Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(3, 2)$.
Βρείτε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, 3)$ στην $(3, 2)$.

Άσκηση 13 Βρείτε, εάν υπάρχει, μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ στο i.
Βρείτε, εάν υπάρχει, μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο $-2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ στο i.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σημείο $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ δεν βρίσκεται πάνω στην υ-ευθεία $\varepsilon_{-1,2} = (1, -3)$, και συνεπώς

δεν απεικονίζεται στην $(0, \infty)$. Άρα δεν υπάρχει τέτοιος μετασχηματισμός.
Ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει την $(1, -3)$ στην $(0, \infty)$ είναι ο $f(z) = \frac{bz-b}{-z-3}$.
$f(-2+\mathrm{i}\sqrt{3}) = b\sqrt{3}\mathrm{i}$, άρα $b = 1/\sqrt{3}$.

Άσκηση 14 Φέρετε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius σε κανονική μορφή $\frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$, και εξετάστε εάν είναι ελλειπτικοί, παραβολικοί ή υπερβολικοί. Σε κάθε περίπτωση, βρείτε τα σταθερά σημεία τους.

α′. $f(z) = -\frac{1}{z}$	β′. $f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$
γ′. $f(z) = z + 1$	δ′. $f(z) = 3z$
ε′. $f(z) = \frac{\cos\vartheta\, z+\sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z+\cos\vartheta}$	ϛ′. $f(z) = \frac{z}{-2z+1}$
ζ′. $f(z) = 3z + 1$	η′. $f(z) = \frac{2z+1}{-2z}$
ϑ′. $f(z) = \frac{z}{4z+3}$	ι′. $f(z) = \frac{-3}{z}$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) $f(z) = \frac{0z-1}{1z+0}$, $\tau = 0$, ελλειπτικός, σταθερό σημείο i.
β′) $f(z) = \frac{(1/\sqrt{2})z+1/\sqrt{2}}{(-1/\sqrt{2})z+1/\sqrt{2}}$, $\tau = 2$, ελλειπτικός, σταθερό σημείο i.
ϛ′) $f(z) = \frac{1z+0}{-2z+1}$, $\tau = 4$, παραβολικός, σταθερό σημείο 0.
ζ′) $f(z) = \frac{\sqrt{3}z+1/\sqrt{3}}{0z+1/\sqrt{3}}$, $\tau = (\sqrt{3} + 1/\sqrt{3})^2 > 4$, υπερβολικός, σταθερά σημεία ∞ και $-1/2$.

Άσκηση 15 Βρείτε τα σταθερά σημεία των μετασχηματισμών Möbius:

α′. $f(z) = \frac{z-2}{z+3}$	β′. $f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2}$
γ′. $f(z) = \frac{z-1}{4z+5}$	δ′. $f(z) = \frac{-z-4}{z+3}$

και διακρίνετε τον τύπο κάθε μετασχηματισμού: ελλειπτικό, παραβολικό ή υπερβολικό.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) Σταθερό σημείο $-1 + \mathrm{i} \in \mathcal{H}$, ελλειπτικός.
β′) Σταθερά σημεία $-1, \frac{1}{2} \in \partial\mathcal{H}$, υπερβολικός.

Άσκηση 16 Για τους μετασχηματισμούς της Άσκησης 15, βρείτε την παράμετρο τ και επιβεβαιώστε τον τύπο του μετασχηματισμού.

Άσκηση 17 Για τους μετασχηματισμούς Möbius:

α′. $f(z) = \frac{z-2}{z+3}$	β′. $f(z) = \frac{-3z+1}{2z-2}$
γ′. $f(z) = \frac{z-1}{4z+5}$	δ′. $f(z) = \frac{-z-4}{z+3}$

βρείτε το μετασχηματισμό h έτσι ώστε ο συζυγής $h \circ f \circ h^{-1}$ να είναι σε κανονική μορφή, και υπολογίστε την κανονική μορφή.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) h πρέπει να απεικονίζει το σταθερό σημείο $-1 + \mathrm{i}$ στο i: μπορούμε να επιλέξουμε $h(z) = z + 1$. Αφού

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

η κανονική μορφή είναι η $z \mapsto \frac{2z-1}{z+2}$. Ο ελλειπτικός μετασχηματισμός είναι περιστροφή κατά γωνία 2ϑ, με $\cos\vartheta = 2/\sqrt{5}$ και $\sin\vartheta = -1/\sqrt{5}$, δες Άσκηση 18.

Άσκηση 18 Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ της υ-ευθείας $(0, \infty)$ και της εικόνας της από τον ελλειπτικό μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{\cos\vartheta\, z + \sin\vartheta}{-\sin\vartheta\, z + \cos\vartheta}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο μετασχηματισμός f είναι ελλειπτικός με σταθερό σημείο $\mathrm{i} \in \mathcal{H}$, και $f(0, \infty) = (\tan\vartheta, -\cot\vartheta)$. Η γωνία φ μεταξύ της υ-ευθείας $(0, \infty)$ και της εικόνας της δίδεται από τη σχέση $\cot\varphi = (\cot\vartheta - \tan\vartheta)/2$, από την οποία βρίσκουμε $\varphi = 2\vartheta$.

Άσκηση 19 Θεωρήστε το μετασχηματισμό Möbius

$$f(z) = \frac{\sqrt{3}z + 1}{-z + \sqrt{3}}.$$

α′. Δείξτε οτι $f^6(z) = z$ για κάθε $z \in \mathcal{H}$.

β′. Δείξτε οτι εάν $\beta = -c\alpha$, όπου $\alpha > 0$ και $c = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, τότε οι ευθείες (α, β) και $(-\beta, -\alpha)$ τέμνονται σε ορθή γωνία.

γ′. Βρείτε α τέτοιο ώστε η υ-ευθεία (α, β) να απεικονίζεται από τον μετασχηματισμό Möbius f στην υ-ευθεία $(-\beta, -\alpha)$ (δηλαδή $f(\alpha) = c\alpha$). Λύστε την εξίσωση αριθμητικά, χρησιμοποιώντας Matlab ή Excel.

δ′. Χρησιμοποιώντας μία από τις δύο τιμές του α που βρήκατε, υπολογίστε (με Matlab ή Excel) τα σημεία $f(\alpha)$, $f^2(\alpha)$, $\ldots$, $f^5(\alpha)$ και τα σημεία $\beta = -c\alpha$, $f(\beta)$, $\ldots$, $f^5(\beta)$.

ε′. Σχεδιάστε τις υ-ευθείες $(\alpha,\,\beta)$, $(f(\alpha),\,f(\beta))$, $\ldots$, $(f^5(\alpha),\,f^5(\beta))$. Τι υπερβολικό σχήμα σχεδιάσατε; Τι γωνία σχηματίζουν οι πλευρές του;

Άσκηση 20 Υπολογίστε την υπερβολική απόσταση $d(z,\,w)$ μεταξύ των σημείων

α′. $z = \mathrm{i},\ w = \frac{\mathrm{i}}{r}$

β′. $z = 3 + 2\mathrm{i},\ w = 3 + \frac{\mathrm{i}}{2}$

γ′. $z = 3 + 4\mathrm{i},\ w = -3 + 4\mathrm{i}\,.$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) $\log r\,,$ β′) $\log 4\,,$ γ′) $\log\left(\frac{(-8+4\mathrm{i})(8+4\mathrm{i})}{(2+4\mathrm{i})(-2+4\mathrm{i})}\right) = \log 4.$

Άσκηση 21 Θεωρήστε το σύνολο $K = \{w \in \mathcal{H} : \ w = t + \mathrm{i}t,\ t > 0\}$ και το σημείο $z = x + \mathrm{i}y$. Βρείτε την απόσταση από το σημείο z στο σύνολο K,

$$d(z,\,K) = \inf\{d(z,\,w) : \ w \in K\}\,.$$

Βρείτε το πλησιέστερο προς το z σημείο του K και περιγράψτε το γεωμετρικά.

Άσκηση 22 Αποδείξτε τις υπερβολικές ταυτότητες

α′. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

β′. $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$

γ′. $\cosh\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t + 1}{2}}$

δ′. $\sinh\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t - 1}{2}}$

Άσκηση 23 Θεωρήστε τα σημεία $z = r\mathrm{i}$, $w_0 = t\mathrm{i}$ και $w_1 = s + t\mathrm{i}$. Δείξτε οτι

$$d(z,\,w_1) \geq d(z,\,w_0)$$

με ισότητα μόνον όταν $s = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\cosh d(r\mathrm{i},\,s + t\mathrm{i}) = \frac{s^2+t^2+r^2}{2tr}$ και $\cosh d(r\mathrm{i},\,t\mathrm{i}) = \frac{t^2+r^2}{2tr}$.

Άσκηση 24 Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: εάν $z,\,u,\,w \in \mathcal{H}$,

$$d(z,\,w) \leq d(z,\,u) + d(u,\,w)\,,$$

με ισότητα μόνον όταν το u βρίσκεται μεταξύ των z και w.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Υποθέτουμε $z = r\mathrm{i}$, $w = p\mathrm{i}$, $u = s + t\mathrm{i}$, με $r < p$. Εξετάζουμε περιπτώσεις:

α′. εάν u βρίσκεται μεταξύ των z και w, τότε $r < t < p$ και $s = 0$. Υπολογίζουμε $d(z, w) = \log(p/r) = \log(p/t) + \log(t/r) = d(z, u) + d(u, w)$.

β′. εάν $r < t < p$ και $s \neq 0$, από την 'σκηση 23 έχουμε $d(z, u) + d(u, w) > d(z, ti) + d(ti, w) = d(z, w)$

γ′. εάν $t < r$ ή $t > p$, συνδυάζοντας τα προηγούμενα δείχνουμε οτι $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$.

Άσκηση 25 Βρείτε την υπερβολική απόσταση που αντιστοιχεί σε γωνία παραλληλισμού $\pi/6$. (Υπολογιστικά φύλλα, όπως το Libre Office ή το Excel υπολογίζουν τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους, π.χ. COSH, ACOSH.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\cosh b = 1/\sin\alpha$. $\sin(\pi/6) = 1/2$. Άρα $\cosh b = 2$ και $b = 1,317$.

Άσκηση 26 Βρείτε τα μήκη των πλευρών ένος υπερβολικού τριγώνου με γωνίες $\pi/2$, $\pi/4$ και $\pi/6$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$ και $\gamma = \pi/6$.
Από Κανόνα Συνημιτόνου ΙΙ, $\cosh b = \sqrt{2}$, $b = 0,881$.
$\cosh c = \sqrt{3/2}$, $c = 0,658$.
Από Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα, $\cosh a = \sqrt{3}$, $a = 1,146$.

Άσκηση 27 Δείξτε οτι ένα ισοσκελές υπερβολικό τρίγωνο, με $d(A, B) = d(A, C))$ έχει τις γωνίες της βάσης ίσες, $\beta = \gamma$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το Θεώρημα του Ισοσκελούς Τριγώνου αποδεικνύεται χωρίς χρήση του αξιώματος των παραλλήλων: είναι η πρόταση ε′ του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων. Για μία υπολογιστική απόδειξη, χρησιμοποιήστε τον Κανόνα Ημιτόνου.

Άσκηση 28 Για κάθε $\vartheta \in [0, \pi/3)$ κατασκευάστε ένα ισόπλευρο υπερβολικό τρίγωνο με γωνίες ϑ. (Βρείτε τις κορυφές ενός τέτοιου τριγώνου που βρίσκονται πάνω σε τρεις υ-ευθείες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες $\pi/3$).
Βρείτε το μήκος της πλευράς του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ϑ.
Βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ϑ.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{z+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}z+1}$, που είναι περιστροφή κατά $2\pi/3$ γύρω από το σημείο i, απεικονίζει την υ-ημιευθεία [i, ∞) στην υ-ημιευθεία [i, $-\sqrt{3}/3$). Ο f^{-1} απεικονίζει την υ-ημιευθεία [i, ∞) στην υ-ημιευθεία [i, $\sqrt{3}/3$).

Θεωρούμε τα σημεία πάνω στις ημιευθείες [i, ∞), [i, $-\sqrt{3}/3$) και [i, $\sqrt{3}/3$) που απέχουν $r = \log k$ από το σημείο i. Αυτά είναι τα $A = k\mathrm{i}$, $B = \frac{k\mathrm{i}+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}k\mathrm{i}+1}$ και $C = \frac{k\mathrm{i}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}k\mathrm{i}+1}$. Οι πλευρές του τριγώνου ABC είναι ίσες, αφού η περιστροφή γύρω από το i κατά γωνία $2\pi/3$, που διατηρεί τις αποστάσεις, απεικονίζει τα A, B, C στα B, C, A αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου με γωνία ϑ από τον Κανόνα Συνημιτόνου ΙΙ: $\cosh c = \frac{\cos^2\vartheta+\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$. Αφού $\cosh c > 1$, πρέπει να ισχύει $\cos\vartheta > 1/2$, και συνεπώς $\vartheta < \pi/3$.

Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $r = \log k$, και την υπολογίζουμε από τον Κανόνα Συνημιτόνου ΙΙ στο ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες $\vartheta/2$, $\vartheta/2$, $2\pi/3$: $\cosh r = 1/(2\tan(\vartheta/2))$.

Άσκηση 29 Βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα κανονικό ορθογώνιο εξάγωνο. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 26.)

Άσκηση 30 Θεωρήστε υπερβολικό τετράπλευρο $ABCD$ με τρεις ορθές γωνίες στις κορυφές A, B, C και $d(A, B) = d(B, C) = t$. Δείξτε οτι $d(A, D) = d(C, D)$. Βρείτε τη σχέση μεταξύ του μήκους t και της γωνίας $\delta = \angle ADC$. Υπολογίστε το μήκος $d(A, D)$ συναρτήσει του t.