

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 3.1

Η διδασκαλία της απόδειξης

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Η τυπική απόδειξη

Ποιός είναι ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά;

Αρχικά πρέπει να συμφωνήσουμε τι εννοούμε απόδειξη.

Η τυπική απόδειξη στη Λογική είναι μία πεπερασμένη ακολουθία από προτάσεις, όπου κάθε μία

- είτε είναι μία υπόθεση, ένα αξίωμα, ή μία πρόταση που έχει αποδειχθεί προηγουμένως,
- είτε προκύπτει από τις προηγούμενες μέσω των κανόνων της Λογικής.

Σκοπός μίας τυπικής απόδειξης είναι να εξασφαλίσει ότι ένα Θεώρημα είναι λογική συνέπεια των αξιωμάτων.

Απόδειξη και κατανόηση

Αυτή η έννοια της τυπικής απόδειξης δεν έχει μεγάλη συνάφεια με τις αποδείξεις που δημοσιεύονται σε ερευνητικά μαθηματικά περιοδικά.

Ένας λόγος είναι ότι η τυπική απόδειξη ακόμη και της πιο απλής πρότασης θα ήταν εξαιρετικά μακροσκελής.

Ένας πιο σημαντικός λόγος είναι ότι η μαθηματική έρευνα δεν βασίζεται μόνο στη Λογική, αλλά και στη διαίσθηση.

Μία μαθηματικός επιθυμεί να κατανοήσει πώς και γιατί αποδεικνύεται κάτι, και όχι απλώς να ελέγξει τα λογικά βήματα από τις υποθέσεις στα συμπεράσματα.

Απόδειξη και κατανόηση

Μία βασική λειτουργία της απόδειξης είναι η κατανόηση. Η πορεία της κατανόησης κατά τη διάρκεια της απόδειξης μπορεί να είναι εξ ίσου σημαντική με το αποτέλεσμα.

Ο Yu. Manin (1992) περιγράφει την απόδειξη με την ακόλουθη μεταφορά:

Αξιώματα, ορισμοί και θεωρήματα είναι τοποθεσίες στο μαθηματικό τοπίο, τοπικά αξιοθέατα ή οδικό κόμβοι. Οι αποδείξεις είναι οι ίδιοι οι δρόμοι, τα μονοπάτια και οι κεντρικές οδοί. Κάθε διαδρομή έχει τα δικά της αξιοθέατα, που μπορεί να είναι πιο σημαντικά από το ότι οδηγεί από το A στο B .

Η απόδειξη στα Μαθηματικά

Αλλά η δραστηριότητα μίας ερευνήτριας στα Μαθηματικά δεν περιορίζεται στην απόδειξη. Ο G.Polya, (1954), γράφει:

Τα Μαθηματικά θεωρούνται μία αποδεικτική επιστήμη. Όμως αυτή είναι μόνο μία όψη τους. Τα 'τελειωμένα μαθηματικά', παρουσιασμένα στην τελική μορφή, φαίνεται να αποτελούνται μόνον από αποδείξεις. Αλλά τα μαθηματικά εν τω γεννάσθαι, είναι όμοια με τη δημιουργία κάθε άλλης ανθρώπινης γνώσης. Πρέπει να μαντέψεις ένα μαθηματικό θεώρημα πριν το αποδείξεις. Πρέπει να μαντέψεις την ιδέα της απόδειξης πριν συμπληρώσεις τις λεπτομέρειες. Πρέπει να συνδυάσεις παρατηρήσεις και να ακολουθήσεις αναλογίες. Να προσπαθήσεις ξανά και ξανά. Το αποτέλεσμα της παραγωγικής δουλειάς ενός μαθηματικού είναι ο παραγωγικός συλλογισμός, μία απόδειξη. Αλλά η ανακάλυψη της απόδειξης γίνεται με εύλογους συλλογισμούς, με μαντεψιές.

Οι λειτουργίες της απόδειξης

Στο πλαίσιο της κοινότητας των μαθηματικών, η απόδειξη έχει διάφορες λειτουργίες, Stylianides et al. (2022).

- Χρησιμεύει στην επαλήθευση εικασιών, δηλαδή στον περιορισμό των αμφιβολιών για την αλήθεια ενός ισχυρισμού.
- Χρησιμεύει για να διευθετηθεί μία διαφωνία για την ισχύ μίας πρότασης.
- Συνεισφέρει στην παραγωγή νέας γνώσης: νέες μεθόδους, επεξηγήσεις, ανάδειξη κρυμμένων υποθέσεων, παραγωγή νέων εικασιών.

Η απόδειξη στην εκπαίδευση

Ποιός είναι ο ρόλος της απόδειξης στα σχολικά Μαθηματικά;

Ο E.Fischbein, ένας από τους ιδρυτές του κλάδου της Διδακτικής των Μαθηματικών, σε ένα άρθρο του 1982, με τίτλο Intuition and proof, παρουσιάζει τα αποτελέσματα μίας έρευνας.

Σε 400 μαθητές και μαθήτριες επιπέδου Λυκείου, παρουσιάστηκε μία απόδειξη, και μετά ζητήθηκε να απαντήσουν σε κάποιες ερωτήσεις.

Κατανόηση της απόδειξης

Δίδονται τα ποσοστά θετικών απαντήσεων για κάθε ερώτηση.

Ισχύει το συμπέρασμα;	68%
Είναι ορθή η απόδειξη;	82%
Η απόδειξη δικαιολογεί το συμπέρασμα;	60%

Μόνο 41% απάντησαν θετικά και στις τρεις ερωτήσεις.

Κατανόηση της απόδειξης

Στη συνέχεια του είπαν ότι κάποιος ισχυρίζεται ότι βρήκε αντιπαράδειγμα. Τι νομίζετε;

Πρέπει να κάνει λάθος	32%
Πρέπει να υπάρχουν εξαιρέσεις	18%
Το αντιπαράδειγμα είναι σωστό	6%
Το αντιπαράδειγμα αναιρεί το αποτέλεσμα	15%

Κατανόηση της απόδειξης

Τέλος ζητήθηκε να απαντήσουν στο ερώτημα: Εάν θεωρείτε την απόδειξη σωστή, θεωρείτε ότι επιπλέον έλεγχοι, με άλλους αριθμούς, είναι απαραίτητοι για να αυξήσουν τη βεβαιότητά σας;

Μόνον 24% θεώρησαν σωστή την απόδειξη και απάντησαν ότι δεν απαιτούνται άλλοι έλεγχοι.

Μόνο 14% ήταν απολύτως συνεπείς σε όλες τις απαντήσεις.

Είδη απόδειξης

Η ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων από τον Fischbein βασίζεται στη διαπίστωση ότι για τον ανθρώπινο νου υπάρχουν δύο μέθοδοι απόδειξης.

- Όσον αφορά πραγματικά γεγονότα, η απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση πολλών περιπτώσεων που επιβεβαιώνουν έναν ισχυρισμό, (επαγωγική απόδειξη).
- Όσον αφορά μαθηματικά αποτελέσματα, η απόδειξη βασίζεται σε λογικά συμπεράσματα από προτάσεις που έχουν ήδη γίνει αποδεκτές (παραγωγική απόδειξη).

Είδη απόδειξης

Αλλά οι δύο αυτές μέθοδοι δεν είναι ισότιμες στην πράξη.

Στο τωρινό στάδιο εξέλιξης του ανθρώπινου νου, η εμπειρική επαγωγή είναι η κύρια μέθοδος επιβεβαίωσης ενός ισχυρισμού.

Καθώς ένα παιδί μεγαλώνει, μαθαίνει να αναζητά δεδομένα που επιβεβαιώνουν ή καταρρίπτουν τις προβλέψεις του.

Η έννοια της τυπικής απόδειξης είναι ξένη προς αυτή την προσέγγιση. Προσφέρει βεβαιότητα χωρίς ούτε ένα παράδειγμα.

Η λογική απόδειξη δεν γίνεται κατανοητή από τον φυσιολογικό τρόπο σκέψης. Για να γίνει αυτό απαιτείται μία θεμελιώδης αλλαγή του τρόπου σκέψης.

Η απόδειξη στο σχολείο

Ερευνητικά αποτελέσματα σαν αυτά του Fischbein, οδήγησαν στην αμφισβήτηση της χρησιμότητας της διδασκαλία της απόδειξης στα σχολεία τη δεκαετία του '80.

Σε πολλές χώρες μειώθηκε ο ρόλος της απόδειξης στα αναλυτικά προγράμματα, ως αντίδραση στην άποψη για την αυστηρότητα της απόδειξης στα New Math τις δεκαετίες του '60 και του '70.

Κάποιοι ερευνητές επισημαίνουν ότι συχνά η διδασκαλία της απόδειξης στην τάξη περιορίζεται στην αποστήθιση αποδείξεων, χωρίς κάποια παιδαγωγική αξία. Θεωρούν πιο χρήσιμη τη διερεύνηση και την άτυπη αιτιολόγηση.

Οι λειτουργίες της απόδειξης στην εκπαίδευση

Στα Μαθηματικά, μία απόδειξη μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές λειτουργίες: την επαλήθευση μίας πρότασης, την επεξήγηση ενός αποτελέσματος, τη συστηματικοποίηση ή την ανακάλυψη νέων γνώσεων, την επικοινωνία μαθηματικής γνώσης ή την κατασκευή μίας θεωρίας.

Στην εκπαίδευση, οι πρώτες λειτουργίες που συναντά μία μαθήτρια είναι η επαλήθευση και η επεξήγηση.

Οι λειτουργίες της απόδειξης στην εκπαίδευση

Στη σχολική τάξη, η βασική ερώτηση στην οποία καλείται να απαντήσει η απόδειξη είναι “γιατί;”. Συνεπώς είναι φυσικό να προκρίνονται, από εκπαιδευτική άποψη, αποδείξεις που συμβάλουν στην επεξήγηση. (Hanna, 2000).

Κάποιες αποδείξεις είναι από τη φύση τους πιο επεξηγηματικές από άλλες: αναφέρονται σε κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα ενός αντικειμένου ή μίας δομής, και από την απόδειξη γίνεται φανερό ότι το αποτέλεσμα εξαρτάται από αυτή την ιδιότητα.

Αποδείξεις στη Γεωμετρία

Παράδειγμα απόδειξης που προσφέρει κατανόηση είναι η απόδειξη ότι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου διέρχονται από ένα σημείο, η οποία βασίζεται στην ιδιότητα ότι η διχοτόμος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές.

Αυτό κάνει την απόδειξη πειστική και διαφωτιστική, βοηθώντας τις μαθήτριες να κατανοήσουν γιατί το αποτέλεσμα πρέπει να ισχύει.

Πολλές από τις αποδείξεις στη σχολική Γεωμετρία έχουν αυτό το χαρακτηριστικό.

Υπάρχουν όμως και αποτελέσματα στην απόδειξη των οποίων χρησιμοποιούνται μέθοδοι που βοηθούν λιγότερο στην κατανόηση, όπως η απαγωγή σε άτοπο ή η μαθηματική επαγωγή.

Στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών

Ιστορικά, οι στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών και οι τρόποι που αξιολογούμε την επίδοση των μαθητριών, βασίζονται στις δεξιότητες και τις γνώσεις που αποκτούν.

Αλλά από τη δεκαετία του '90, παρατηρείται μία διεύρυνση αυτών των στόχων. Ένας νέος στόχος είναι η κοινότητα της σχολικής τάξης να δρα μαθηματικά, οι μαθήτριες και οι μαθητές να εμπλέκονται σε *αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα*.

Κεντρική θέση σε αυτή την κατεύθυνση έχει η έννοια της απόδειξης και η σχολική δραστηριότητα της απόδειξης.

Αυθεντικά μαθηματική δραστηριότητα στο σχολείο

Σύμφωνα με την M.Lampert (1992), για να είναι η σχολική δραστηριότητα “αυθεντικά μαθηματική” πρέπει να μεταπηδά ανάμεσα στο

- να είναι αυθεντική για την κοινότητα της τάξης, δηλαδή να είναι ουσιαστική και σημαντική για τις μαθήτριες και τους μαθητές, και
- να είναι αυθεντική ως αντανάκλαση της κουλτούρας της κοινότητας των μαθηματικών.

Μαθηματικοί στόχοι και δραστηριότητες

Οι Stylianides et al. (2022) αναπτύσσουν αυτή την ιδέα.

Οι κοινότητες των μαθηματικών έχουν *μαθηματικούς στόχους*, όπως να κατανοήσουν κεντρικές ιδέες των Μαθηματικών, να διευρύνουν τα αποτελέσματα τα οποία θεωρούν αληθή ή να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους στην κοινότητα των μαθηματικών.

Οι *μαθηματικές δραστηριότητες* των μαθηματικών επιδιώκουν να προωθήσουν αυτούς τους στόχους.

Μαθηματικοί στόχοι και δραστηριότητες στο σχολείο

Οι σχολικές τάξεις των Μαθηματικών έχουν επίσης στόχους, οι οποίοι μπορεί να ευθυγραμμίζονται ή να μην ευθυγραμμίζονται με μαθηματικούς στόχους.

Για παράδειγμα, ένας στόχος μίας τάξης Μαθηματικών μπορεί να είναι να αποφασίσει εάν κάποιες προτάσεις είναι αληθείς, ή να διευρύνει την κατανόηση κάποιων μαθηματικών εννοιών από τα μέλη της.

Ένας άλλος αποδεκτός στόχος μίας τάξης Μαθηματικών μπορεί να είναι να εξασκηθεί ώστε να μπορεί να εκτελεί κάποιες διαδικασίες με ακρίβεια, ή να απαντήσει σωστά και γρήγορα στις ερωτήσεις ενός τεστ.

Μαθηματικοί στόχοι και δραστηριότητες στο σχολείο

Οι δραστηριότητες μίας τάξης Μαθηματικών μπορεί επίσης να ευθυγραμμίζονται ή να μην ευθυγραμμίζονται με μαθηματικές δραστηριότητες.

Για να αποφασίσει την ορθότητα μία πρότασης, μία τάξη μπορεί να προσπαθήσει να την αιτιολογήσει, ξεκινώντας από κάποιες υποθέσεις.

Μία άλλη τάξη μπορεί, για να αποφασίσει την ορθότητα μίας πρότασης να απευθυνθεί στην αυθεντία της δασκάλας ή του σχολικού βιβλίου.

Αυθεντικά μαθηματική δραστηριότητα στο σχολείο

Έτσι, κάποιοι από τους στόχους μία σχολικής τάξης ευθυγραμμίζονται με στόχους της κοινότητας των μαθηματικών, και μπορούν να προωθηθούν μέσα από δραστηριότητες που ευθυγραμμίζονται με μαθηματικές δραστηριότητες, όπως τις αντιλαμβάνεται η κοινότητα των μαθηματικών.

Αυτές οι δραστηριότητες αποτελούν τα “Αυθεντικά Μαθηματικά” στο σχολείο.

Η διδασκαλία της απόδειξης είναι ένα πεδίο στο οποίο μπορεί να προσφέρει αυτή η προσέγγιση της διδασκαλίας.

Η διδασκαλία της απόδειξης

Κάτω από το πρίσμα των “αυθεντικών μαθηματικών” η διδασκαλία της απόδειξης αλλάζει στόχους και μέθοδο.

Στόχος δεν είναι πλέον μόνον η κατανόηση μίας απόδειξης και της σημασίας της για την επαλήθευση μίας πρότασης.

Δραστηριότητες όπως η διατύπωση εικασιών, η γενίκευση, η αναζήτηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, η προσπάθεια αιτιολόγησης των εικασιών, ο διάλογος στην τάξη σχετικά με εναλλακτικές εικασίες, αποτελούν μέρος της “αυθεντικής μαθηματικής δραστηριότητας” της απόδειξης.

Η διδασκαλία της απόδειξης

Οι λειτουργίες της απόδειξης στην σχολική τάξη ευθυγραμμίζονται με τις λειτουργίες που αναφέραμε στο πλαίσιο της μαθηματικής κοινότητας:

- επαλήθευση εικασιών,
- διευθέτηση διαφωνιών και
- παραγωγή νέας γνώσης.

Η απόδειξη στην σχολική τάξη

Στο Stylianides et al. (2022) δίδεται ο ακόλουθος χαρακτηρισμός της απόδειξης στο πλαίσιο της σχολικής τάξης.

Η απόδειξη στην τάξη των Μαθηματικών είναι μία συνεκτική ακολουθία ισχυρισμών για την ορθότητα ή μη μίας πρότασης, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

- Ⓐ Χρησιμοποιεί διατυπώσεις αποδεκτές από την κοινότητα της τάξης, οι οποίες είναι αληθείς και μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς άλλη αιτιολόγηση.
- β Χρησιμοποιεί μορφές συλλογισμού που είναι έγκυρες και γνωστές ή γνωστικά προσπελάσιμες στην κοινότητα της τάξης.
- γ Διατυπώνεται με μορφές επιχειρηματολογίας κατάλληλες και γνωστές ή γνωστικά προσπελάσιμες στην κοινότητα της τάξης.

Η διδασκαλία της απόδειξης

Έχοντας αυτό τον ορισμό στο μυαλό μας, στις επόμενες διαλέξεις θα μελετήσουμε κάποια πρόσφατα ερευνητικά άρθρα που εξετάζουν διαφορετικές πτυχές της διδασκαλίας της απόδειξης.

Βιβλιογραφία

Fischbein, E., Intuition and Proof. *For the learning of Mathematics*. 3. 1982.

Hanna, G., Proof, explanation and exploration. *Educational Studies in Mathematics*. 44. 2000.

Stylianides, A.J., Komatso, K., Weber, K., Stylianides, G.J., Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving. In Danesi, M., (Ed.) *Handbook of Cognitive Mathematics*, Springer. 2022.