

Η Διδακτική της Γεωμετρίας  
Διάλεξη 2.4  
Το αίτημα των παραλλήλων

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

## Γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη.

Από τις ανισωτικές ιδιότητες των τριγώνων συμπεραίνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

### Θεώρημα

*Εάν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές τότε είναι παράλληλες.*

## Το “5ο αίτημα” των Στοιχείων

Το πέμπτο αίτημα των Στοιχείων θεσπίζει ότι ισχύει και το αντίστροφο: εάν οι γωνίες δεν είναι παραπληρωματικές, τότε οι ευθείες τέμνονται.

- Καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ’ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ’ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

## Προτάσεις ισοδύναμες με το 5ο αίτημα

Κατά τη διάρκεια της προσπάθειας να αποδειχθεί αίτημα των παραλλήλων, που συνεχίστηκε για περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια, βρέθηκαν πολλές άλλες προτάσεις που είναι λογικά ισοδύναμες με αυτό.

Δηλαδή εάν δεχθούμε το αίτημα των παραλλήλων μπορούμε να τις αποδείξουμε, και αντίστροφα, αν δεχθούμε μία από αυτές τις προτάσεις μπορούμε να αποδείξουμε το αίτημα των παραλλήλων.

Θα δούμε κάποιες από αυτές τις προτάσεις, που μελέτησαν ο Πρόκλος, (410 - 485), ο Πέρσης στρονόμος και φιλόσοφος Νασρ Αντ-Ντην Ατ-Τούση, (1201 - 1274), ο Wallis, (1616 - 1703), ο Saccheri, (1667 - 1733), ο Legendre, (1752 - 1833) και ο Playfair, (1748 - 1819).

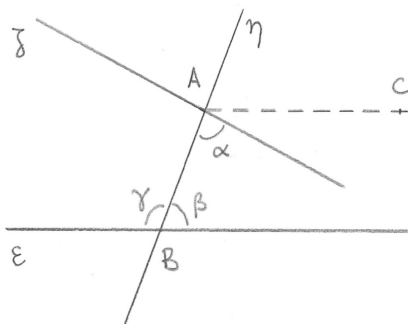
## Προτάσεις ισοδύναμες με το 5ο αίτημα

- Ⓐ Εάν οι ευθείες  $\delta$  και  $\varepsilon$  είναι παράλληλες, η απόσταση ενός σημείου της  $\delta$  από την  $\varepsilon$  είναι φραγμένη.
- Ⓑ Εάν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε υπάρχει ευθεία που είναι κοινή κάθετη των δύο παραλλήλων.
- Ⓒ Για δεδομένο τρίγωνο υπάρχει όμοιο τρίγωνο με δεδομένη πλευρά. Υπάρχουν τρίγωνα με αυθαίρετα μεγάλο εμβαδόν.
- Ⓓ Υπάρχει τετράπλευρο με 4 ορθές γωνίες.
- Ⓔ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.
- Ⓕ Υπάρχει μόνο μία ευθεία παράλληλη προς δοθείσα ευθεία που διέρχεται από δοθέν σημείο.

# Το αξίωμα Playfair

## Θεώρημα

Το 5ο αίτημα είναι ισοδύναμο με το αξίωμα Playfair.



Σχῆμα: Το αξίωμα Playfair.

## Βιβλιογραφία

Κουρουνιώτης, Χ., Προσωρινές Σημειώσεις μαθήματος MEM203 Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδακτική της. Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2023.  
<http://users.math.uoc.gr/~chrisk/Euclidean2023-h.pdf>

Στράντζαλος, Χ. Η εξέλιξη των ευκλείδειων και των μη ευκλείδειων γεωμετριών (μέρος πρώτο), 1987, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.