

Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 6.4

Η υπερβολική απόσταση

Ορίζουμε την **υπερβολική απόσταση** μεταξύ σημείων του υπερβολικού επιπέδου και δείχνουμε ότι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί είναι **ισομετρίες** του υπερβολικού επιπέδου.

Πρώτα θεωρούμε δύο σημεία z_0, w_0 , με $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re} w_0 = 0$. Για κάθε $a > 0$, $z \mapsto az$ είναι μετασχηματισμός Möbius, άρα η απόσταση $d(z_0, w_0)$ πρέπει να είναι ίση προς την $d(az_0, aw_0)$. Συμπεραίνουμε ότι $d(z_0, w_0)$ πρέπει να είναι συνάρτηση του $\frac{w_0}{z_0}$.

Επίσης η απόσταση κατά μήκος μίας υπερβολικής ευθείας πρέπει να είναι προσθετική, δηλαδή εάν u_0 βρίσκεται μεταξύ των z_0 και w_0 πρέπει να ισχύει

$$d(z_0, w_0) = d(z_0, u_0) + d(u_0, w_0).$$

Άρα θέλουμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f\left(\frac{w_0}{z_0}\right) = f\left(\frac{u_0}{z_0}\right) + f\left(\frac{w_0}{u_0}\right).$$

Μία προφανής τέτοια συνάρτηση είναι ο λογάριθμος:

$$\log \frac{u_0}{z_0} + \log \frac{w_0}{u_0} = \log \frac{u_0 w_0}{z_0 u_0} = \log \frac{w_0}{z_0}.$$

Για να επεκτείνουμε αυτό τον ορισμό σε κάθε ζεύγος σημείων του $\mathcal{H}$, ώστε να είναι καλά ορισμένη η απόσταση, πρέπει να δείξουμε ότι όποιο υπερβολικό μετασχηματισμό και να χρησιμοποιήσουμε που απεικονίζει δύο σημεία $w, z \in \mathcal{H}$ σε σημεία w_0, z_0 με $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re} w_0 = 0$, η τιμή του $\left| \log \frac{w_0}{z_0} \right|$ θα είναι η ίδια.

Υποθέτουμε ότι z_*, w_* είναι τα πέρατα της υ-ευθείας που ορίζουν τα z, w , και θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει το z_* στο 0 και το w_* στο ∞ :

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{u - z_*}{u - w_*} && \text{εάν } z_* - w_* > 0 \\ g(u) &= \frac{-u + z_*}{u - w_*} && \text{εάν } z_* - w_* < 0. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι $z_* - w_* < 0$. Εάν h είναι οποιοσδήποτε άλλος μετασχηματισμός που απεικονίζει τα z_* , w_* στα 0 , ∞ αντίστοιχα, $g \circ h^{-1}$ είναι μετασχηματισμός Möbius με σταθερά σημεία 0 , ∞ , άρα είναι της μορφής $u \mapsto au$. Αλλά τότε $g(z) = ah(z)$ και $g(w) = ah(w)$, άρα

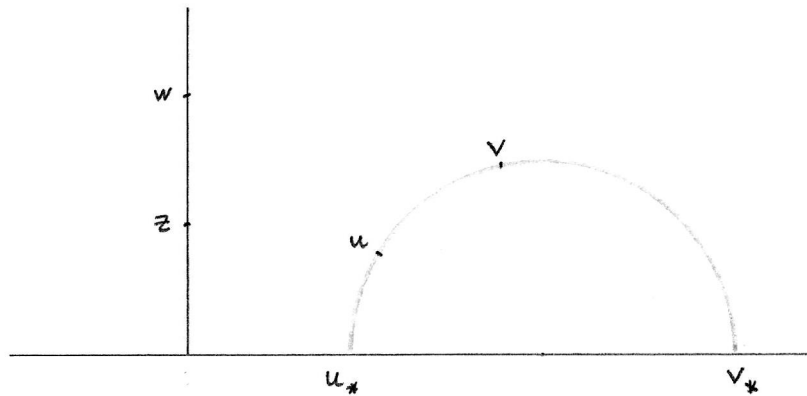
$$\left| \log \frac{g(w)}{g(z)} \right| = \left| \log \frac{h(w)}{h(z)} \right|.$$

Θέτουμε για κάθε $z, w \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $z_* - w_* < 0$,

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(g(z), g(w)) \\ &= \left| \log \left(\frac{g(w)}{g(z)} \right) \right| \\ &= \left| \log \frac{(z - w_*)(w - z_*)}{(z - z_*)(w - w_*)} \right|, \end{aligned}$$

και παρόμοια, εάν $z_* - w_* > 0$,

$$\begin{aligned} d(z, w) &= d(f(z), f(w)) \\ &= \left| \log \frac{(z - w_*)(w - z_*)}{(z - z_*)(w - w_*)} \right|. \end{aligned}$$



$$d(z, w) = \left| \log \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z} \right| \quad d(u, v) = \left| \log \frac{(u - v_*)(v - u_*)}{(u - u_*)(v - v_*)} \right|$$

Σχήμα 17: Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο σημείων.

Ορισμός. Η υπερβολική απόσταση μεταξύ των σημείων $z, w \in \mathcal{H}$ είναι $d(z, w)$, όπου η συνάρτηση $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως:

α'. εάν $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w$, και z_* , w_* τα πέρατα της υ-ευθείας από το z στο w ,

$$d(z, w) = \left| \log \frac{(z - w_*)(w - z_*)}{(z - z_*)(w - w_*)} \right|,$$

β'. εάν $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$,

$$d(z, w) = \left| \log \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z} \right|.$$

Πρόταση 14 Η $d(z, w)$ είναι αναλλοίωτη από υπερβολικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή εάν $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ είναι υπερβολικός μετασχηματισμός, $d(f(z), f(w)) = d(z, w)$.

Απόδειξη. Αρχεί να ελέγξουμε ότι η ισότητα ισχύει για τους μετασχηματισμούς g, h, k, j της παραγοντοποίησης υπερβολικών μετασχηματισμών. Αυτό είναι προφανές για τα g και h , και ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι ισχύει για το k .

Για το $j(z) = -\bar{z}$, παρατηρούμε ότι αφού τα z_*, z, w, w_* βρίσκονται στην ίδια υ-ευθεία (z_*, w_*), τα $\frac{w-z_*}{w-w_*}$ και $\frac{z-z_*}{z-w_*}$ βρίσκονται στην υ-ευθεία $(0, \infty)$, και

$$\frac{j(w) - j(z_*)}{j(w) - j(w_*)} = \frac{-\bar{w} + z_*}{-\bar{w} + w_*} = \overline{\left(\frac{w - z_*}{w - w_*} \right)} = -\frac{w - z_*}{w - w_*}$$

και παρόμοια

$$\frac{j(z) - j(z_*)}{j(z) - j(w_*)} = -\frac{z - z_*}{z - w_*}.$$

Άρα $d(j(z), j(w)) = d(z, w)$.

□

Θεώρημα 15 Η συνάρτηση $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρική, δηλαδή για κάθε $u, w, z \in \mathcal{H}$,

α'. $d(z, w) \geq 0$ και $d(z, w) = 0$ εάν και μόνον εάν $z = w$.

β'. $d(z, w) = d(w, z)$.

γ'. $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$.

Απόδειξη. Τα (α') και (β') είναι προφανή από τον ορισμό. Θα δείξουμε αργότερα την τριγωνική ανισότητα (γ').

□

Στην υπερβολική γεωμετρία εμφανίζονται συχνά οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις,

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

$$\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}.$$

Η βασική ταυτότητα της υπερβολικής τριγωνομετρίας είναι

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Χρήσιμοι είναι οι κανόνες του αθροίσματος,

$$\cosh(s + t) = \cosh s \cosh t + \sinh s \sinh t,$$

$$\sinh(s + t) = \cosh s \sinh t + \sinh s \cosh t.$$

Δραστηριότητα 10 Βρείτε τους τύπους για $\cosh 2t$, $\sinh 2t$ και αποδείξτε τους τύπους

$$\cosh(t/2) = \sqrt{\frac{\cosh t + 1}{2}}, \quad \sinh(t/2) = \sqrt{\frac{\cosh t - 1}{2}}.$$

Πρόταση 16

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η αριστερή πλευρά είναι αναλλοίωτη, δηλαδή για κάθε μετασχηματισμό Möbius f , $\cosh d(f(z), f(w)) = \cosh d(z, w)$. Πρώτα θα δείξουμε ότι και η δεξιά πλευρά είναι αναλλοίωτη. Παρατηρούμε ότι $\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$ είναι αναλλοίωτο από τους μετασχηματισμούς g, h, j της παραγοντοποίησης υπερβολικών μετασχηματισμών. Απομένει να δείξουμε ότι είναι αναλλοίωτο και από τον k :

$$\begin{aligned} \frac{|k(z) - k(w)|^2}{\operatorname{Im} k(z) \operatorname{Im} k(w)} &= \frac{\left| \frac{-1}{z} - \frac{-1}{w} \right|^2}{\operatorname{Im} \frac{-1}{z} \operatorname{Im} \frac{-1}{w}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{w}} \right)}{\frac{\operatorname{Im} z}{z\bar{z}} \frac{\operatorname{Im} w}{w\bar{w}}} \\ &= \frac{|z - w|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \end{aligned}$$

Αφού για κάθε $z, w \in \mathcal{H}$ υπάρχει μετασχηματισμός Möbius που τα απεικονίζει στα i, it αντίστοιχα, αρκεί να αποδείξουμε την ισότητα για $z = i, w = it$. Πράγματι,

$$\cosh d(i, it) = \cosh \left| \log \frac{t}{s} \right| = \frac{e^{\log \frac{t}{s}} + e^{-\log \frac{t}{s}}}{2} = \frac{\frac{t}{s} + \frac{s}{t}}{2} = \frac{s^2 + t^2}{2st},$$

και

$$1 + \frac{|is - it|^2}{2st} = 1 + \frac{(s - t)^2}{2st} = \frac{s^2 + t^2}{2st}.$$

□

Άλλες εκφράσεις για την υπερβολική απόσταση:

$$\alpha'. \quad d(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|},$$

$$\beta'. \quad \sinh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{1/2}},$$

$$\gamma'. \quad \cosh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{1/2}},$$

$$\delta'. \quad \tanh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

Για να επαληθεύσουμε την (α') υπολογίζουμε το υπερβολικό συνημίτονο της δεξιάς πλευράς, και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$. Για τις άλλες εκφράσεις χρησιμοποιούμε τους τύπους της Δραστηριότητας 10.

Θεώρημα 17 Η ομάδα των ισομετριών του υπερβολικού επιπέδου είναι η ομάδα $G_{\mathcal{H}}$. Δηλαδή οι μόνες απεικονίσεις $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ που διατηρούν την απόσταση είναι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί.

Κάθετος από σημείο προς ευθεία

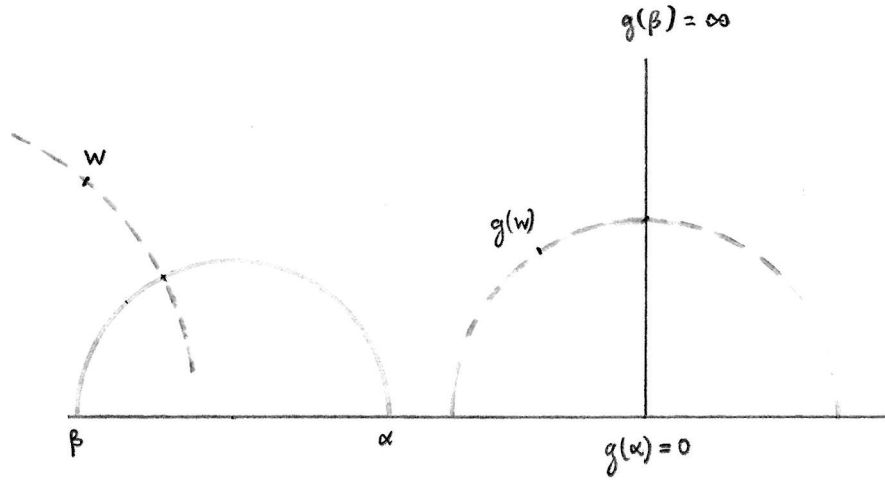
Θεωρούμε σημείο w του υπερβολικού επιπέδου, υ-ευθεία (α, β) , και υποθέτουμε $\alpha > \beta$, και μετασχηματισμό Möbius f τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = \infty$, για παράδειγμα τον $f(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Τότε η υ-ευθεία (α, β) απεικονίζεται από τον f στην $(0, \infty)$ και το σημείο w στο $f(w) = \frac{w-\alpha}{w-\beta}$.

Η υ-ευθεία $(-|f(w)|, |f(w)|)$ είναι κάθετος από το $f(w)$ προς την $(0, \infty)$. Άρα η υ-ευθεία με πέρατα $f^{-1}(-|f(w)|)$ και $f^{-1}(|f(w)|)$ είναι κάθετος από το w στην (α, β) . Υπολογίζουμε τα πέρατα αυτής της υ-ευθείας: $f^{-1}(z) = \frac{-\beta z + \alpha}{-z + 1}$ και

$$f^{-1}(-|f(w)|) = \frac{-\beta \left(-\left| \frac{w-\alpha}{w-\beta} \right| \right) + \alpha}{\left| \frac{w-\alpha}{w-\beta} \right| + 1} = \frac{\beta|w-\alpha| + \alpha|w-\beta|}{|w-\alpha| + |w-\beta|}.$$

Άρα η κάθετος από το σημείο w προς την υ-ευθεία (α, β) είναι η υ-ευθεία

$$\left(\frac{\beta|w-\alpha| + \alpha|w-\beta|}{|w-\alpha| + |w-\beta|}, \frac{-\beta|w-\alpha| + \alpha|w-\beta|}{-|w-\alpha| + |w-\beta|} \right).$$



Σχήμα 18: Κάθετος από σημείο προς ευθεία.

Η απόσταση από το σημείο w στην υ-ευθεία ε είναι

$$d(w, \varepsilon) = \inf\{d(w, z) : z \in \varepsilon\}.$$

Θα δείξουμε ότι αυτό είναι ίσο με το μήκος της καθέτου από το w στην ε . Εάν ε είναι η υ-ευθεία $(0, \infty)$ και $w = u + iv$, $d(w, \varepsilon) = \inf\{d(w, it) : t > 0\}$. Αφού η $\cosh t$ είναι αύξουσα για $t > 0$, αρκεί να βρούμε το $\inf\{\cosh d(w, it) : t > 0\}$. Υπολογίζουμε

$$\cosh d(w, it) = \frac{|w|}{2v} \left(\frac{|w|}{t} + \frac{t}{|w|} \right).$$

Αλλά $(a + 1/a) \geq 2$ για κάθε $a > 0$, και συνεπώς $\cosh d(w, it) \geq \frac{|w|}{v}$ με ισότητα ακριβώς όταν $t = |w|$, δηλαδή όταν it βρίσκεται στην κάθετο από το w .

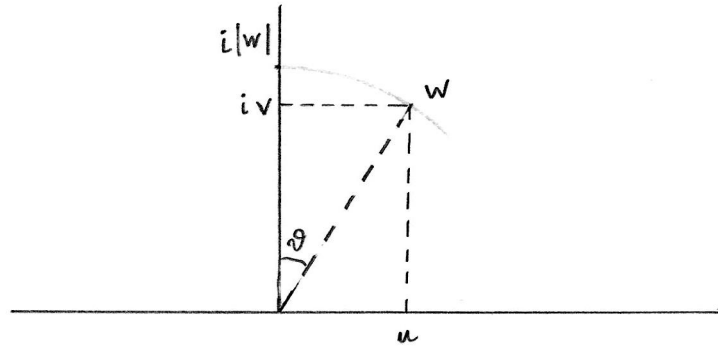
Εάν $\cos \vartheta = \frac{v}{|w|}$, έχουμε

$$\cosh d(w, \varepsilon) = \frac{1}{\cos \vartheta}.$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση από την υ-ευθεία $(0, \infty)$ βρίσκονται στους υπέρκυκλους $\{x + iy \in \mathcal{H} : \frac{x}{y} \text{ σταθερό}\}$.

Δραστηριότητα 11 Δείξτε ότι με τον παραπάνω συμβολισμό,

$$\sinh d(w, \varepsilon) = \tan \vartheta \quad \text{και} \quad \tanh d(w, \varepsilon) = \sin \vartheta.$$



Σχήμα 19: Απόσταση σημείου από ευθεία.

Αναλλοίωτα σύνολα

Θα εξετάσουμε τα σύνολα που παραμένουν αναλλοίωτα από ένα μετασχηματισμό Möbius.

Εάν f είναι ελλειπτικός μετασχηματισμός, με σταθερό σημείο $z_0 \in \mathcal{H}$, ο f διατηρεί αμετάβλητη την απόσταση μεταξύ του z_0 και άλλων σημείων του $\mathcal{H}$. Συνεπώς ο f απεικονίζει κάθε υπερβολικό κύκλο με κέντρο z_0 στον εαυτό του.

Θα προσδιορίσουμε τον υπερβολικό κύκλο C με υπερβολικό κέντρο το σημείο $i \in \mathcal{H}$ και ακτίνα $r > 0$. Εάν f_ϑ , για $0 < \vartheta < \pi$, είναι ο ελλειπτικός μετασχηματισμός Möbius

$$f_\vartheta(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta},$$

ο οποίος έχει σταθερό σημείο i , τότε για κάθε ϑ η απόσταση του σημείου $f_\vartheta(e^r i)$ από το i είναι ίση με $d(i, e^r i) = |\log e^r| = r$. Δηλαδή όλα τα σημεία $f_\vartheta(e^r i)$, για $0 < \vartheta < \pi$, ανήκουν στον υπερβολικό κύκλο C .

Αντίστροφα, εάν $d(z, i) = r$ και η υπερβολική ημιευθεία από το i στο z σχηματίζει γωνία φ με την ημιευθεία από το i στο ∞ , τέτοια ώστε $0 < \varphi < 2\pi$, μπορούμε να δείξουμε ότι $z = f_\vartheta(e^r i)$ για $\vartheta = \varphi/2$. Συμπεραίνουμε ότι $C = \{f_\vartheta(e^r i) : 0 \leq \vartheta < \pi\}$.

Δραστηριότητα 12 Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ της υ-ευθείας $(0, \infty)$ και της εικόνας της από τον ελλειπτικό μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{\cos \vartheta z + \sin \vartheta}{-\sin \vartheta z + \cos \vartheta}.$$

Λήμμα 18 Ο υπερβολικός κύκλος C με υπερβολικό κέντρο το σημείο $i \in \mathcal{H}$ και ακτίνα $r > 0$ συμπίπτει με τον ευκλείδειο κύκλο με διάμετρο το διάστημα $[e^r i, e^{-r} i]$,

δηλαδή

$$C = \{z \in \mathcal{H} : |z - i \cosh r| = \sinh r\}.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε την ευκλείδεια απόσταση από το $f_\vartheta(e^r i)$ στο $i \cosh r$, και δείχνουμε ότι είναι $\sinh r$. Παρατηρούμε ότι $e^r = \cosh r + \sinh r$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} f_\vartheta(e^r i) &= \frac{i \cos \vartheta (\cosh r + \sinh r) + \sin \vartheta}{-i \sin \vartheta (\cosh r + \sinh r) + \cos \vartheta}, \\ f_\vartheta(e^r i) - i \cosh r &= \frac{-\sin \vartheta (\cosh r \sinh r + \sinh^2 r) + i \cos \vartheta \sinh r}{\cos \vartheta - \sin \vartheta (\sinh r + \cosh r) i}, \\ |f_\vartheta(e^r i) - i \cosh r|^2 &= \frac{\sin^2 \vartheta \sinh^2 r (\cosh r + \sinh r)^2 + \cos^2 \vartheta \sinh^2 r}{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta (\sinh r + \cosh r)^2}, \end{aligned}$$

και καταλήγουμε ότι $|f_\vartheta(e^r i) - i \cosh r| = \sinh r$.

□

Εάν f είναι παραβολικός μετασχηματισμός, τότε f είναι συζυγής προς τον $z \mapsto z+1$, ο οποίος αφήνει αμετάβλητους τους ορίκυκλους $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = a\}$ για $a > 0$. Έπεται ότι ο μετασχηματισμός f αφήνει αμετάβλητους τους ορίκυκλους που έχουν πέρασ στο σταθερό του σημείο. Αυτοί είναι οι ευκλείδειοι κύκλοι που εφάπτονται στο $\partial \mathcal{H}$ στο σταθερό σημείο του f .

Εάν ο μετασχηματισμός Möbius f είναι υπερβολικός, ο f είναι συζυγής προς τον $h_d : z \mapsto e^d z$, που έχει σταθερά σημεία τα 0 και ∞ . Ο h_d αφήνει αμετάβλητη την υ-ευθεία $(0, \infty)$. Κάθε σημείο της μετατοπίζεται σταθερή απόσταση d , αφού $d(z, h_d(z)) = |\log(e^d z/z)| = d$. Ο h_d αφήνει επίσης αμετάβλητους τους υπέρκυκλους με πέρατα 0 και ∞

$$\sigma_\vartheta = \{te^{i(\frac{\pi}{2}-\vartheta)} : t > 0\}, \text{ για } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \vartheta \neq 0.$$

Οι υπέρκυκλοι σ_ϑ και $\sigma_{-\vartheta}$ είναι το σύνολο των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση a από την υ-ευθεία $(0, \infty)$ όπου $\cosh a = \frac{1}{\cos \vartheta}$.

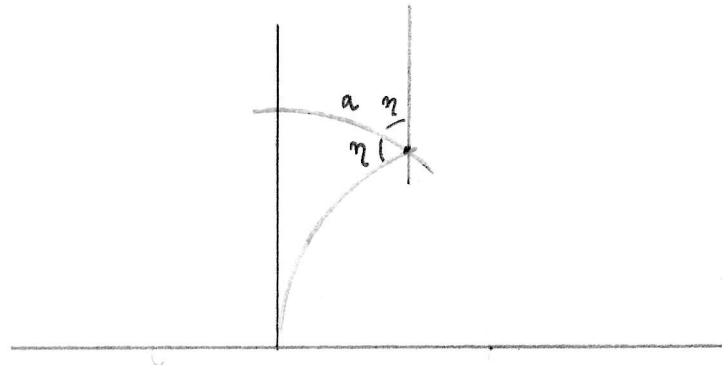
Ο συζυγής μετασχηματισμός $f = g \circ h_d \circ g^{-1}$ έχει σταθερά σημεία $\alpha = g(0)$ και $\beta = g(\infty)$, αφήνει αμετάβλητη την υ-ευθεία (α, β) και μετατοπίζει κάθε της σημείο σταθερή απόσταση d . Επίσης αφήνει αμετάβλητους τους υπέρκυκλους με πέρατα α και β . Ένας τέτοιος υπέρκυκλος $g(\sigma_\vartheta)$ είναι το τόξο που περιέχεται στο $\mathcal{H}$ ενός ευκλείδειου κύκλου που περνάει από τα σημεία α και β και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ με το $\partial \mathcal{H}$. Οι υπέρκυκλοι $g(\sigma_\vartheta)$ και $g(\sigma_{-\vartheta})$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση a , $\cosh a = \frac{1}{\cos \vartheta}$, από την υ-ευθεία (α, β) .

Η γωνία παραλληλισμού

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία η παράλληλος προς την ευθεία ε από το σημείο A είναι μοναδική, και είναι η κάθετος προς την κάθετο από το A προς την ε . Στην υπερβολική

γεωμετρία μια παράλληλος από το σημείο w προς την u -ευθεία ε δεν είναι μοναδική, και δεν σχηματίζει ορθή γωνία με την κάθετο από το w προς την ε .

Ορισμός. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ μίας ασύμπτωτης παραλλήλου από το σημείο w προς την u -ευθεία ε και της κάθετου από το w προς την ε ονομάζεται **γωνία παραλληλισμού**.



Σχήμα 20: Γωνία παραλληλισμού.

Πρόταση 19 Η γωνία παραλληλισμού η εξαρτάται μόνον από την απόσταση a από το σημείο w προς την u -ευθεία ε , και δίδεται από τη σχέση

$$\cosh a \sin \eta = 1.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μία ισομετρία για να μεταφέρουμε την u -ευθεία ε στην $(0, \infty)$ και το σημείο w σε ένα σημείο της μορφής $e^{i\eta}$, για $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Η κάθετος από το z προς την $(0, \infty)$ είναι η u -ευθεία $(1, -1)$ και μία ασύμπτωτη παράλληλος είναι η ημιευθεία $[z, \infty)$, η οποία σχηματίζει γωνία η με την κάθετο. Εάν η απόσταση του σημείου z από την u -ευθεία $(0, \infty)$ είναι a ,

$$\cosh a = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - \eta)} = \frac{1}{\sin \eta}.$$

□

Ασκήσεις

Άσκηση 20 Υπολογίστε την υπερβολική απόσταση $d(z, w)$ μεταξύ των σημείων

$$\alpha'. \quad z = i, w = \frac{i}{r}$$

$$\beta'. \quad z = 3 + 2i, w = 3 + \frac{i}{2}$$

$$\gamma'. \quad z = 3 + 4i, w = -3 + 4i.$$

Άσκηση 21 Θεωρήστε το σύνολο $K = \{w \in \mathcal{H} : w = t + it, t > 0\}$ και το σημείο $z = x + iy$. Βρείτε την απόσταση από το σημείο z στο σύνολο K ,

$$d(z, K) = \inf\{d(z, w) : w \in K\}.$$

Βρείτε το πλησιέστερο προς το z σημείο του K και περιγράψτε το γεωμετρικά.

Άσκηση 22 Αποδείξτε τις υπερβολικές ταυτότητες

$$\alpha'. \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \qquad \beta'. \quad \cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$$

$$\gamma'. \quad \cosh \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t + 1}{2}} \qquad \delta'. \quad \sinh \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t - 1}{2}}$$

Άσκηση 23 Θεωρήστε τα σημεία $z = ri$, $w_0 = ti$ και $w_1 = s + ti$. Δείξτε ότι

$$d(z, w_1) \geq d(z, w_0)$$

με ισότητα μόνον όταν $s = 0$.

Άσκηση 24 Αποδείξτε την τριγωνική ανισότητα: εάν $z, u, w \in \mathcal{H}$,

$$d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w),$$

με ισότητα μόνον όταν το u βρίσκεται μεταξύ των z και w .

Άσκηση 25 Βρείτε την υπερβολική απόσταση που αντιστοιχεί σε γωνία παραλληλισμού $\pi/6$. (Υπολογιστικά φύλλα, όπως το Libre Office ή το Excel υπολογίζουν τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους, π.χ. COSH, ACOSH.)