

Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 6.2

Μετασχηματισμοί της υπερβολικής γεωμετρίας.

Οι μετασχηματισμοί της υπερβολικής γεωμετρίας, ή υπερβολικοί μετασχηματισμοί είναι απεικονίσεις $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ της μορφής

$$\alpha') \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ή} \quad \beta') \quad f(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc > 0$.

Παράδειγμα 1

1. $f(z) = 2z = \frac{2z + 0}{0z + 1},$
2. $f(z) = -\frac{1}{z} = \frac{0z - 1}{1z + 0},$
3. $f(z) = 3z + 2 = \frac{3z + 2}{0z + 1},$
4. $f(z) = -\frac{1}{3z + 2} = \frac{0z - 1}{3z + 2}.$

Μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι $ad - bc = 1$, αρκεί να διαιρέσουμε όλους τους συντελεστές με $\sqrt{ad - bc}$.

Δραστηριότητα 2 Δείξτε ότι οι απεικονίσεις της μορφής (α') ή της μορφής (β') είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ότι εάν $z \in \mathcal{H}$ τότε $f(z) \in \mathcal{H}$.

Θα δείξουμε επίσης ότι είναι αντιστρέψιμες, και η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης υπερβολικός μετασχηματισμός.

Οι μετασχηματισμοί της μορφής (α') διατηρούν τον προσανατολισμό του υπερβολικού επιπέδου, και ονομάζονται **μετασχηματισμοί Möbius** του υπερβολικού επιπέδου $\mathcal{H}$.

Οι μετασχηματισμοί της μορφής (β') αντιστρέφουν τον προσανατολισμό του υπερβολικού επιπέδου.

Οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί επεκτείνονται στο σύνορο $\partial\mathcal{H}$.

- Εάν $\operatorname{Im} z = 0$ και $z \neq -\frac{d}{c}$, τότε $\operatorname{Im} f(z) = 0$,
- Εάν $z = -\frac{d}{c}$, τότε $f(z) = \infty$,
- Εάν $z = \infty$, τότε $f(z) = \frac{a}{c}$.

Επισημαίνουμε ότι οι μετασχηματισμοί αυτής της μορφής ορίζονται σε όλη τη σφαίρα του Riemann, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, αλλά σε αυτές τις διαλέξεις δεν θα ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς του $\hat{\mathbb{C}}$.

Θεώρημα 2 Οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.

Απόδειξη. Πρέπει να ελέγξουμε ότι το σύνολο των υπερβολικών μετασχηματισμών είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων, και ότι περιέχει ουδέτερο στοιχείο και αντίστροφα στοιχεία. Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει για τη σύνθεση οποιωνδήποτε απεικονίσεων.

Θεωρούμε υπερβολικούς μετασχηματισμούς

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{pz + q}{rz + s}.$$

Τότε η σύνθεση είναι

$$\begin{aligned} f \circ g(z) &= \frac{a \left(\frac{pz+q}{rz+s} \right) + b}{c \left(\frac{pz+q}{rz+s} \right) + d} \\ &= \frac{(ap + br)z + aq + bs}{(cp + dr)z + cq + ds} \\ &= \frac{Az + B}{Cz + D}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι A, B, C, D είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, εάν $ad - bc > 0$ και $ps - qr > 0$, ισχύει επίσης $AD - BC > 0$, και η σύνθεση δύο υπερβολικών μετασχηματισμών της μορφής (α') είναι μετασχηματισμός της μορφής (α').

Παρατηρούμε ότι ένας μετασχηματισμός της μορφής (β') είναι σύνθεση ενός μετασχηματισμού Möbius με την απεικόνιση $j(z) = -\bar{z}$. Παρόμοια ελέγχουμε τις συνθέσεις με τον υπερβολικό μετασχηματισμό $z \mapsto -\bar{z}$.

Δραστηριότητα 3 Δείξτε ότι η σύνθεση δύο μετασχηματισμών της μορφής (β') είναι μετασχηματισμός της μορφής (α') , ενώ η σύνθεση ενός μετασχηματισμού της μορφής (α') και ενός μετασχηματισμού της μορφής (β') είναι μετασχηματισμός της μορφής (β') .

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο όλων των υπερβολικών μετασχηματισμών είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση.

Η ταυτοτική απεικόνιση είναι υπερβολικός μετασχηματισμός, $\text{id}(z) = \frac{1z+0}{0z+1}$.

Δραστηριότητα 4 Δείξτε ότι η αντίστροφη απεικόνιση του υπερβολικού μετασχηματισμού $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Δείξτε ότι η αντίστροφη απεικόνιση του υπερβολικού μετασχηματισμού $h(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ είναι $h^{-1}(z) = \frac{d(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+a}$.

Άρα το σύνολο των υπερβολικών μετασχηματισμών του $\mathcal{H}$ αποτελεί ομάδα, την οποία συμβολίζουμε $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$. Το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius του $\mathcal{H}$ αποτελεί υποομάδα $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$.

□

Παρατηρούμε επίσης ότι έχουμε έναν ομομορφισμό ομάδων από την ομάδα $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές και ορίζουσα 1, στην ομάδα $\text{Möb}_{\mathcal{H}}$, ο οποίος απεικονίζει τον πίνακα $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ στον μετασχηματισμό $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

Ο πυρήνας του ομομορφισμού είναι $\{I, -I\}$, αφού $\frac{az+b}{cz+d} = z$ για κάθε $z \in \mathcal{H}$ μόνον όταν $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα η ομάδα των μετασχηματισμών Möbius είναι ισομορφική με την “προβολική ειδική γραμμική ομάδα”,

$$\text{Möb}_{\mathcal{H}} \cong \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\} = \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Δραστηριότητα 5 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι υπερβολικοί

μετασχηματισμοί, και ποιές είναι μετασχηματισμοί Möbius;

$$\alpha'. f(z) = 3z + 1$$

$$\beta'. f(z) = -z + 2$$

$$\gamma'. f(z) = \frac{2z+3}{2z+2}$$

$$\delta'. f(z) = \frac{2\bar{z}+2}{3\bar{z}+1}$$

$$\epsilon'. f(z) = \frac{3z+6}{2z+4}$$

$$\varphi'. f(z) = \frac{3}{\bar{z}} - 1$$

$$\zeta'. f(z) = \frac{3}{z} - 1$$

$$\eta'. f(z) = -\frac{3}{z} - 2$$

$$\vartheta'. f(z) = 2z - \frac{3}{z}$$

$$\iota'. f(z) = \frac{1}{2z-5}$$

$$\iota\alpha'. f(z) = \frac{1}{2\bar{z}+1}$$

$$\iota\beta'. f(z) = \frac{1}{-2z-2}$$

Γράψτε όσους είναι υπερβολικοί μετασχηματισμοί στην κανονική μορφή (α') ή (β'), με $ad - bc = 1$.

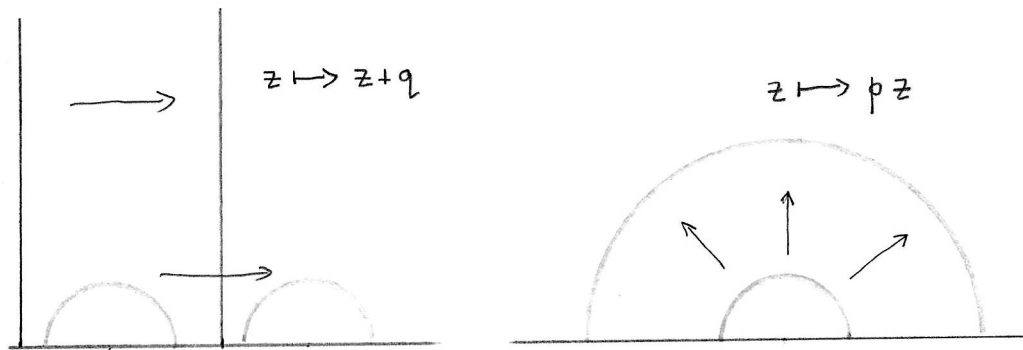
Δραστηριότητα 6 Για τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς της Δραστηριότητας 5, βρείτε την εικόνα του ∞ και το σημείο $z \in \partial\mathcal{H}$ που απεικονίζεται στο ∞ .

Πρόταση 3 Κάθε μετασχηματισμός Möbius εκφράζεται ως σύνθεση απεικονίσεων της μορφής

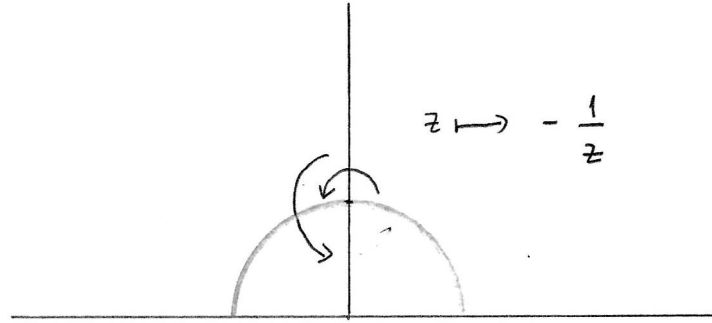
$$g(z) = z + q, \quad q \in \mathbb{R},$$

$$h(z) = pz, \quad p \in \mathbb{R}, p > 0,$$

$$k(z) = -\frac{1}{z}.$$



Σχήμα 12: Οι μετασχηματισμοί Möbius g και h .



Σχήμα 13: Ο μετασχηματισμός Möbius k .

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι g, h, k είναι μετασχηματισμοί Möbius. Άρα οι συνθέσεις τους είναι επίσης μετασχηματισμοί Möbius. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius εκφράζεται ως σύνθεση τέτοιων απεικονίσεων. Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$.

Εάν $c = 0$, τότε $\frac{a}{d} > 0$, και $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ είναι προφανώς σύνθεση απεικονίσεων $g \circ h$, για κατάλληλα p, q .

Εάν $a = 0$, τότε $\frac{c}{b} < 0$, και $f(z) = \frac{-1}{-\frac{c}{b}z - \frac{d}{b}}$ είναι προφανώς σύνθεση απεικονίσεων $k \circ g \circ h$, για κατάλληλα p, q .

Εάν $ac \neq 0$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c > 0$. Θα βρούμε $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, με $p, r > 0$, ώστε f να εκφράζεται ως σύνθεση των $z \mapsto pz + q$ και $z \mapsto \frac{-1}{rz+s}$, δηλαδή

$$\frac{az+b}{cz+d} = p \left(\frac{-1}{rz+s} \right) + q.$$

Πράγματι, $p \left(\frac{-1}{rz+s} \right) + q = \frac{-p+qrs+qs}{rz+s}$, άρα αρκεί να θέσουμε $r = c, s = d, q = \frac{a}{c}$ και $qs - p = b$, δηλαδή $p = \frac{ad}{c} - b = \frac{1+bc}{c} - b = \frac{1}{c}$.

□

Ένας υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό είναι σύνθεση ενός μετασχηματισμού Möbius με την απεικόνιση $j(z) = -\bar{z}$. Άρα κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως σύνθεση των απεικονίσεων g, h, k και j .

Πρόταση 4 Υπερβολικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν u -ευθείες σε u -ευθείες.

Απόδειξη. Αφού κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως σύνθεση των απεικονίσεων g, h, k και j , αρκεί να ελέγξουμε ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί απεικονίζουν u -ευθείες σε u -ευθείες. Αυτό είναι προφανές για τις απεικονίσεις g, h και j .

Θα δείξουμε ότι η εικόνα μίας υ-ευθείας από την απεικόνιση k είναι μία υ-ευθεία. Θεωρούμε την υ-ευθεία $\varepsilon_{\kappa,r} = \{z \in \mathcal{H} : |z - \kappa| = r\}$. Η εικόνα της από την απεικόνιση $k(z) = -\frac{1}{z}$ είναι το σύνολο

$$\left\{ w \in \mathcal{H} : w = -\frac{1}{z}, |z - \kappa| = r \right\} = \left\{ w \in \mathcal{H} : \left| -\frac{1}{w} - \kappa \right| = r \right\}.$$

Δηλαδή, τα σημεία της εικόνας $k(\varepsilon_{\kappa,r})$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{w} - \kappa \right) \left(-\frac{1}{\bar{w}} - \kappa \right) &= r^2 \\ \text{ή} \quad \frac{1 + \kappa w + \kappa \bar{w}}{w \bar{w}} &= r^2 - \kappa^2 \end{aligned}$$

Εάν $r^2 - \kappa^2 \neq 0$, η εξίσωση γίνεται $w \bar{w} = \frac{1 + \kappa w + \kappa \bar{w}}{r^2 - \kappa^2}$ και τελικά

$$\left(w - \frac{\kappa}{r^2 - \kappa^2} \right) \left(\bar{w} - \frac{\kappa}{r^2 - \kappa^2} \right) = \frac{r^2}{(r^2 - \kappa^2)^2},$$

δηλαδή παριστάνει την υ-ευθεία $\varepsilon_{\lambda,s}$, με $\lambda = \frac{\kappa}{r^2 - \kappa^2}$ και $s = \frac{r}{r^2 - \kappa^2}$.

Εάν $r^2 - \kappa^2 = 0$, δηλαδή εάν ένα από τα πέρατα της $\varepsilon_{\kappa,r}$ είναι το 0, η εξίσωση γίνεται $1 + \kappa(w + \bar{w}) = 0$ και παριστάνει την υ-ευθεία ε_α , με $\alpha = -\frac{1}{2\kappa}$.

Παρόμοια για υ-ευθείες της μορφής $\varepsilon_\alpha = \{z \in \mathcal{H} : \operatorname{Re} z = \alpha\}$, εάν $\alpha \neq 0$ η υ-ευθεία ε_α απεικονίζεται στην υ-ευθεία $\varepsilon_{\lambda,s}$, με $\lambda = -\frac{1}{2\alpha}$ και $s = \left| \frac{1}{2\alpha} \right|$.

Τέλος η υ-ευθεία ε_0 απεικονίζεται στον εαυτό της (με την αντίθετη φορά).

Προσπαθήστε να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες των υπολογισμών. Εάν χρειαστεί ανατρέξτε στις σημειώσεις “Επίπεδο και Χώρος”, Κεφάλαιο 3.

□

Παράδειγμα 2 Ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = az + b$ απεικονίζει την υ-ευθεία $\varepsilon_{0,1}$ στην υ-ευθεία $\varepsilon_{b,a}$, και ειδικότερα την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(-1, 1)$ στην $(b - a, b + a)$. Επίσης απεικονίζει την (α, ∞) στην $(a\alpha + b, \infty)$.

Παράδειγμα 3 Θα βρούμε ένα μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$, στην προσανατολισμένη υ-ευθεία (λ, μ) . Θέλουμε $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ τέτοιο ώστε $f(0) = \lambda$ και $f(\infty) = \mu$ και $ad - bc = 1$. Άρα $b = d\lambda$, $a = c\mu$ και $cd = \frac{1}{\mu - \lambda}$. Μπορούμε να θέσουμε $c = 1$, $d = \frac{1}{\mu - \lambda}$, $a = \mu$ και $b = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

Για παράδειγμα, ένας μετασχηματισμός Möbius f που απεικονίζει την υ-ευθεία $(0, \infty)$, στην υ-ευθεία $(2, 4)$ έχει συντελεστές

$$c = 1, \quad d = \frac{1}{2}, \quad a = 4, \quad b = 1 \quad \text{και} \quad f(z) = \frac{4z + 1}{z + \frac{1}{2}}.$$

Ένας μετασχηματισμός Möbius g που απεικονίζει την υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην υ-ευθεία $(1, -1)$ έχει συντελεστές

$$c = 1, \quad d = \frac{1}{-2}, \quad a = -1, \quad b = \frac{1}{-2} \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{-z - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}.$$

Άρα ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(2, 4)$ στην προσανατολισμένη υ-ευθεία $(1, -1)$ είναι ο

$$g \circ f^{-1}(z) = \frac{0z - 1}{1z - 3} = \frac{1}{3 - z}.$$

Παράδειγμα 4 Γεωμετρικά μπορούμε να συνθέσουμε το μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει την $(0, \infty)$ στην (λ, μ) από απλούς μετασχηματισμούς. Υποθέτουμε ότι $\lambda < \mu$.

1. Ευκλείδεια μεταφορά κατά 1, $z \mapsto z + 1$, ώστε η $(0, \infty)$ να απεικονισθεί στην $(1, \infty)$.
2. Το μετασχηματισμό $z \mapsto -\frac{1}{z}$, ώστε η $(1, \infty)$ να απεικονισθεί στην $(-1, 0)$.
3. Ευκλείδεια διαστολή κατά $\mu - \lambda$, $z \mapsto (\mu - \lambda)z$, ώστε η $(-1, 0)$ να απεικονισθεί στην $\lambda - \mu, 0)$.
4. Μεταφορά κατά μ , $z \mapsto z + \mu$, ώστε η $(\lambda - \mu, 0)$ να απεικονισθεί στην (λ, μ) .

Δραστηριότητα 7 Βρείτε τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς που απεικονίζουν την $(0, \infty)$ στην (λ, μ) όταν $\lambda > \mu$. Ξεκινήστε με την ευκλείδεια μεταφορά κατά -1 .

Γωνίες μεταξύ υ-ευθειών.

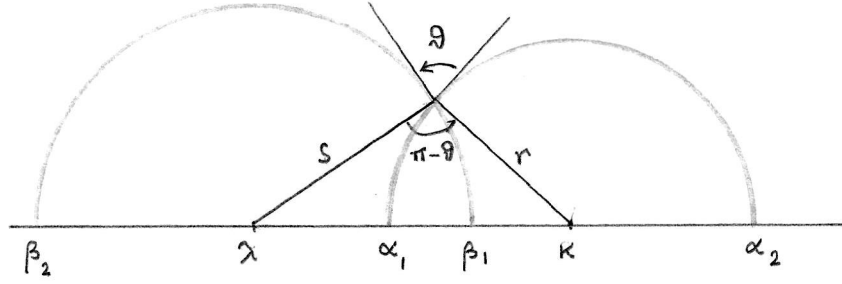
Δύο προσανατολισμένες υ-ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο $z \in \mathcal{H}$, σχηματίζουν γωνία ϑ , $-\pi < \vartheta < \pi$, ίση με τη γωνία μεταξύ των προσανατολισμένων ευκλείδειων εφαπτομένων τους. Θετικές γωνίες έχουν φορά αντίθετη προς αυτή των δεικτών του ρολογιού. Θα δείξουμε ότι οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί διατηρούν το μέγεθος των γωνιών.

Πρόταση 5 Θεωρούμε προσανατολισμένες υ-ευθείες (α_1, α_2) και (β_1, β_2) που τέμνονται στο $z \in \mathcal{H}$, και η γωνία από την (α_1, α_2) στην (β_1, β_2) είναι ϑ .

Εάν g είναι μετασχηματισμός Möbius, τότε η γωνία από την $(g(\alpha_1), g(\alpha_2))$ στην $(g(\beta_1), g(\beta_2))$ είναι ϑ .

Εάν h είναι υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε η γωνία από την $(h(\alpha_1), h(\alpha_2))$ στην $(h(\beta_1), h(\beta_2))$ είναι $-\vartheta$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση των μετασχηματισμών $g(z) = z + q$, $q \in \mathbb{R}$, $h(z) = pz$, $p > 0$, $k(z) = -\frac{1}{z}$ και $j(z) = -\bar{z}$. Είναι προφανές ότι οι μετασχηματισμοί g και h διατηρούν τις γωνίες, ενώ ο j διατηρεί το μέγεθος και αντιστρέφει το πρόσημο της γωνίας. Απομένει να δείξουμε ότι ο k διατηρεί τις γωνίες.



Σχήμα 14: Η γωνία μεταξύ δύο υ-ευθειών.

Όταν δύο υ-ευθείες $\varepsilon_{\kappa,r}$ και $\varepsilon_{\lambda,s}$ τέμνονται σε γωνία ϑ , τα κέντρα των ευκλείδειων φορέων των υ-ευθειών και το σημείο τομής σχηματίζουν τρίγωνο με πλευρές $|\lambda - \kappa|$, r , s και γωνία $\pi - \vartheta$. Σε αυτό το τρίγωνο εφαρμόζουμε τον κανόνα του συνημιτόνου

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= -\cos(\pi - \vartheta) \\ &= \frac{(\lambda - \kappa)^2 - r^2 - s^2}{2rs} \end{aligned}$$

Για τις ευθείες (α_1, α_2) και (β_1, β_2) , έχουμε

$$\kappa = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \lambda = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad r = \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2}, \quad s = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{2},$$

ενώ για τις ευθείες $(k(\alpha_1), k(\alpha_2))$ και $(k(\beta_1), k(\beta_2))$, όπου $k(z) = -\frac{1}{z}$, έχουμε

$$\kappa' = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad \lambda' = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1\beta_2}, \quad r' = \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s' = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{2\beta_1\beta_2}.$$

Αντικαθιστώντας και υπολογίζοντας βρίσκουμε

$$\frac{(\lambda - \kappa)^2 - r^2 - s^2}{2rs} = \frac{4\alpha_1\alpha_2 + 4\beta_1\beta_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{2|\alpha_1 - \alpha_2||\beta_1 - \beta_2|}$$

και

$$\frac{(\lambda' - \kappa')^2 - r'^2 - s'^2}{2r's'} = \frac{\frac{4}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{4}{\beta_1\beta_2} - 2\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}}{\frac{2|\alpha_1 - \alpha_2||\beta_1 - \beta_2|}{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}},$$

τα οποία είναι ίσα.

□

Ασκήσεις

Άσκηση 6 Εκφράστε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Möbius ως σύνθεση απεικονίσεων της μορφής $g(z) = z + q, q \in \mathbb{R}, h(z) = pz, p > 0$ ή $k(z) = -\frac{1}{z}$.

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 3z - 2 \\ \beta'. & f(z) = \frac{-2}{3z+1} \\ \gamma'. & f(z) = \frac{z+1}{-2z+1} \\ \delta'. & f(z) = \frac{2z-1}{z+3} \end{array}$$

Άσκηση 7 Βρείτε την εικόνα των υ-ευθειών ε_0 και $\varepsilon_{1,1}$ από τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & f(z) = 3z - 2 \\ \beta'. & f(z) = \frac{2z-2}{z+1} \\ \gamma'. & f(z) = \frac{-2\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \\ \delta'. & f(z) = \frac{-1}{z} \end{array}$$

Άσκηση 8 Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των υ-ευθειών $\varepsilon_{-1,2}$ και $\varepsilon_{2,3}$ (δηλαδή των ημικυκλίων με κέντρο -1 και ακτίνα 2 και με κέντρο 2 και ακτίνα 3).

Άσκηση 9 Βρείτε την προσημασμένη γωνία από την προσανατολισμένη υ-ευθεία $(0, \infty)$ στην $(-1, 3)$.