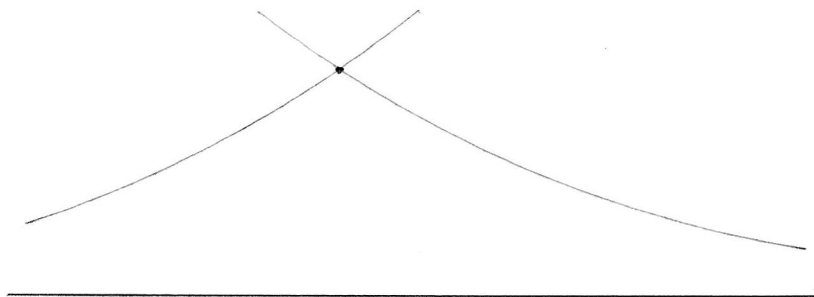


Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 6.1

Υπερβολική Γεωμετρία

Η υπερβολική γεωμετρία αρχικά αναπτύχθηκε αξιωματικά από τον Lobachevsky και τον Bolyai, στις αρχές του 19ου αιώνα, μελετώντας τις συνέπειες της υπόθεσης ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες προς μία ευθεία ε από σημείο εκτός της ε .



Σχήμα 1: Δύο παράλληλες από ένα σημείο προς μία ευθεία.

Κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα ανακαλύφθηκαν μοντέλα της υπερβολικής γεωμετρίας μέσα στην ευκλείδεια γεωμετρία. Αυτό διευκόλυνε πολύ τη μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας. Ταυτόχρονα έδειξε ότι η υπερβολική γεωμετρία είναι ελεύθερη από αντιφάσεις εάν η ευκλείδεια γεωμετρία είναι ελεύθερη από αντιφάσεις.

Σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου του Poincaré.

Το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου $\mathcal{H}$ για το υπερβολικό επίπεδο

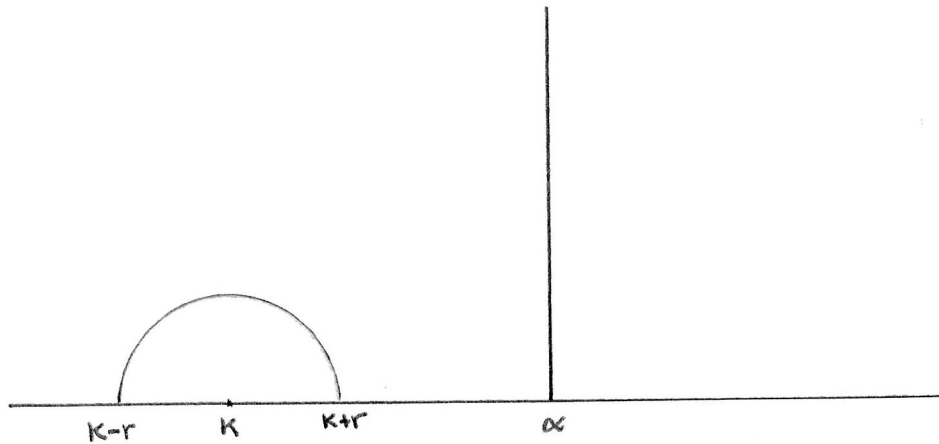
Ως επίπεδο της υπερβολικής γεωμετρίας θα θεωρήσουμε άνω ημιεπίπεδο του Poincaré, δηλαδή το σύνολο

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Σημεία του υπερβολικού επιπέδου είναι τα σημεία $z \in \mathbb{C}$, για τα οποία $\operatorname{Im} z > 0$.

Ευθείες του υπερβολικού επιπέδου, ή υ-ευθείες, είναι

1. ημιευθείες στο $\mathcal{H}$, κάθετες στο σύνορο, δηλαδή σύνολα της μορφής $\varepsilon_\alpha = \{\alpha + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$, για $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. ημικύκλια στο $\mathcal{H}$ ορθογώνια στο σύνορο, δηλαδή σύνολα της μορφής $\varepsilon_{\kappa,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| = r, \operatorname{Im} z > 0\}$.



Σχήμα 2: Ευθείες του υπερβολικού επιπέδου.

Ορίζουμε το **σύνορο** του υπερβολικού επιπέδου

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{H} &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\} \\ &= \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Κάθε ευθεία έχει δύο **πέρατα** στο σύνορο του $\mathcal{H}$.

1. Η ε_α έχει πέρατα α και ∞ .

2. Η $\varepsilon_{\kappa,r}$ έχει πέρατα $\kappa - r$ και $\kappa + r$.

Τα πέρατα μίας υ-ευθείας δεν είναι σημεία του υπερβολικού επιπέδου.

Συμβολίζουμε $\overline{\mathcal{H}}$ το υπερβολικό επίπεδο μαζί με το σύνορό του,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{H}} &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\} \\ &= \mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}.\end{aligned}$$

Τα σημεία στο σύνορο $\partial\mathcal{H}$ δεν είναι σημεία του υπερβολικού επιπέδου, αλλά θα δούμε ότι είναι χρήσιμα στους υπολογισμούς. Το υπερβολικό επίπεδο $\mathcal{H}$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του Hilbert εκτός από το αίτημα των παραλλήλων.

Πρόταση 1 Από δύο διαφορετικά σημεία $z, w \in \mathcal{H}$, περνάει μοναδική υ-ευθεία.

Απόδειξη. Εάν $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w = \alpha$ τότε ε_α είναι η μοναδική υ-ευθεία που περιέχει τα z και w .

Εάν $\operatorname{Re} z \neq \operatorname{Re} w$, υπάρχει μοναδικός κύκλος με κέντρο $\kappa \in \mathbb{R}$ που περνάει από τα z και w . Μπορούμε να κατασκευάσουμε γεωμετρικά το κέντρο κ ως το σημείο τομής της ευκλείδειας μεσοκαθέτου των σημείων z, w με το $\mathbb{R}$. Για να υπολογίσουμε το κ παρατηρούμε ότι $|z - \kappa| = |w - \kappa|$, και αφού $\kappa = \bar{\kappa}$,

$$\kappa = \frac{z\bar{z} - w\bar{w}}{(z + \bar{z}) - (w + \bar{w})}.$$

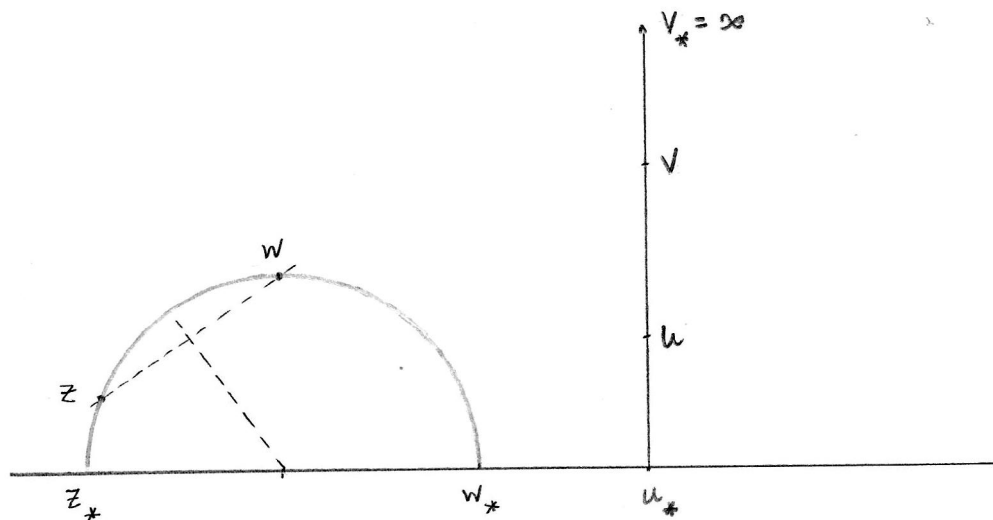
□

Γενικότερα, δύο διαφορετικά σημεία στο $\overline{\mathcal{H}}$ ορίζουν μοναδική υ-ευθεία.

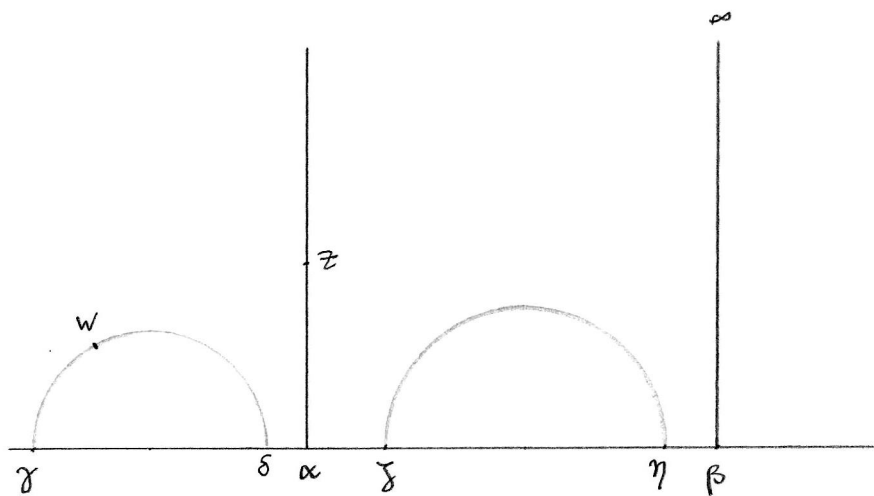
Εάν ε είναι η υ-ευθεία που ορίζουν τα σημεία $z, w \in \mathcal{H}$, συμβολίζουμε z^* το πέρασ της ημιευθείας της ε από το z που δεν περιέχει το w , και w^* το πέρασ της ημιευθείας της ε από το w που δεν περιέχει το z .

Δραστηριότητα 1 Ελέγξτε ότι το σύνολο σημείων $\mathcal{H}$ και το σύνολο υ-ευθειών ικανοποιούν τα αξιώματα του Hilbert για τη γεωμετρία του επιπέδου, εκτός από το αίτημα των παραλλήλων.

Σε κάθε υ-ευθεία μπορούμε να ορίσουμε δύο αντίθετες φορές ή προσανατολισμούς. Οι **προσανατολισμένες ευθείες** που αντιστοιχούν σε μία υ-ευθεία συμβολίζονται με τα διατεταγμένα ζεύγη των περάτων της. Η υ-ευθεία ε_α αντιστοιχεί στις προσανατολισμένες υ-ευθείες (α, ∞) και (∞, α) . Η υ-ευθεία $\varepsilon_{\kappa,r}$ αντιστοιχεί στις προσανατολισμένες υ-ευθείες $(\kappa - r, \kappa + r)$ και $(\kappa + r, \kappa - r)$.



Σχήμα 3: Δύο σημεία του $\mathcal{H}$ ορίζουν μία υ-ευθεία.



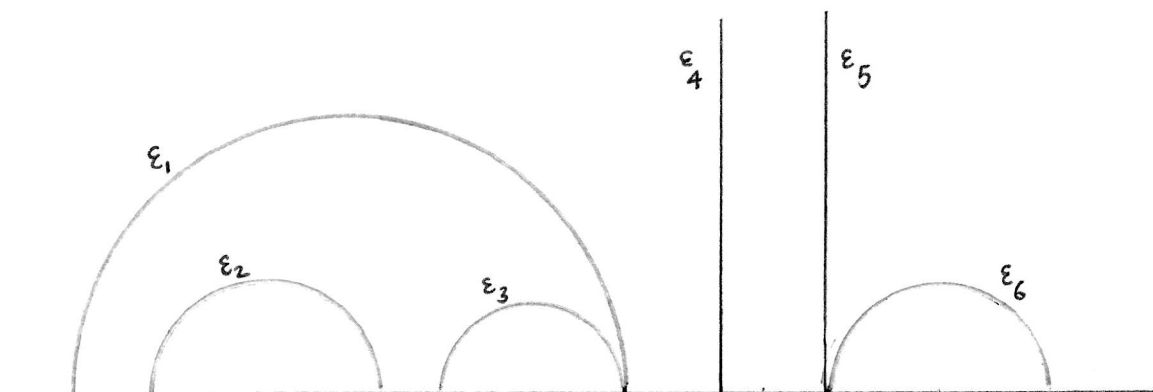
Σχήμα 4: Δύο σημεία του $\overline{\mathcal{H}}$ ορίζουν μία υ-ευθεία.

Παράλληλες ευθείες

Στην υπερβολική γεωμετρία είναι συχνά χρήσιμο να διακρίνουμε τις υ-ευθείες που δεν έχουν κοινά σημεία στο $\mathcal{H}$, τις “παράλληλες” ευθείες, σε δύο κατηγορίες.

Δύο υ-ευθείες λέγονται **ασύμπτωτες παράλληλες** όταν δεν έχουν κοινά σημεία στο $\mathcal{H}$ και έχουν ένα κοινό πέρας στο $\partial\mathcal{H}$.

Δύο υ-ευθείες λέγονται **υπερπαράλληλες** όταν δεν έχουν κοινά σημεία στο $\overline{\mathcal{H}}$.

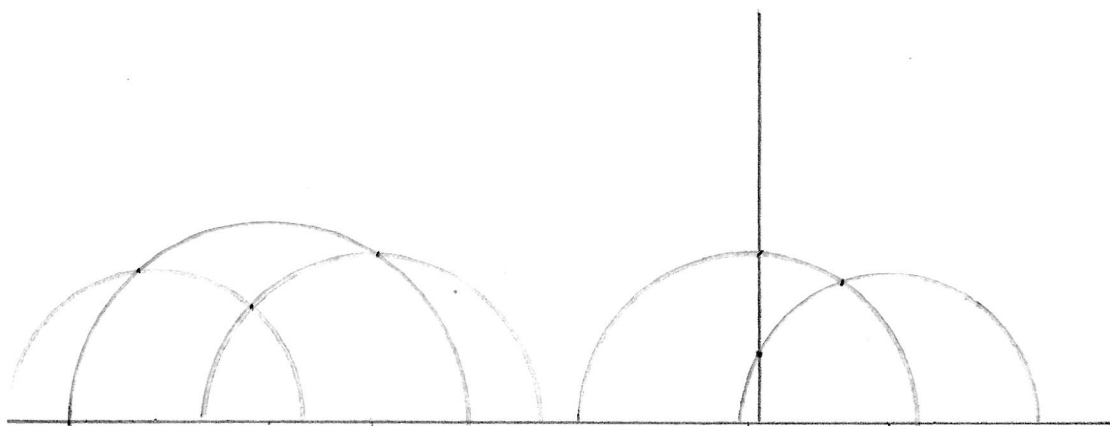


Σχήμα 5: Ασύμπτωτες παράλληλες και υπερπαράλληλες ευθείες στο $\mathcal{H}$.

Υπερβολικά σχήματα

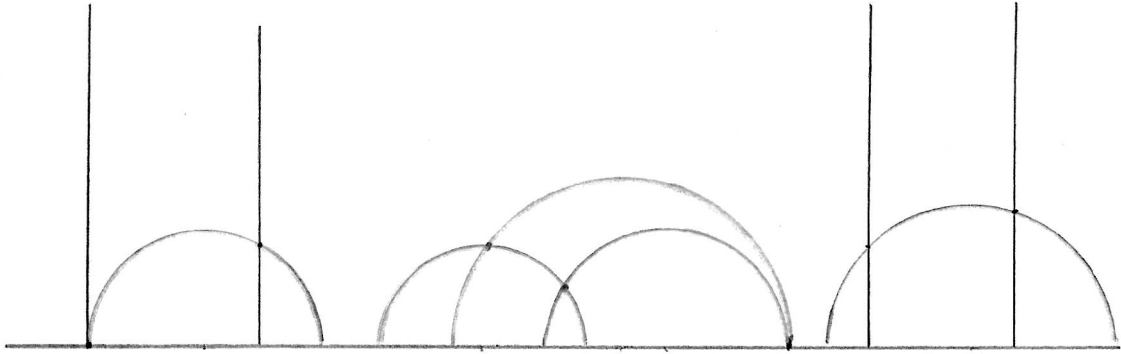
Ένα υπερβολικό σχήμα είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Θα ορίσουμε κάποια σχήματα που εμφανίζονται στη μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας.

Τρία σημεία του $\mathcal{H}$ και οι τρεις υ-ευθείες που διέρχονται από αυτά ορίζουν ένα υπερβολικό τρίγωνο.

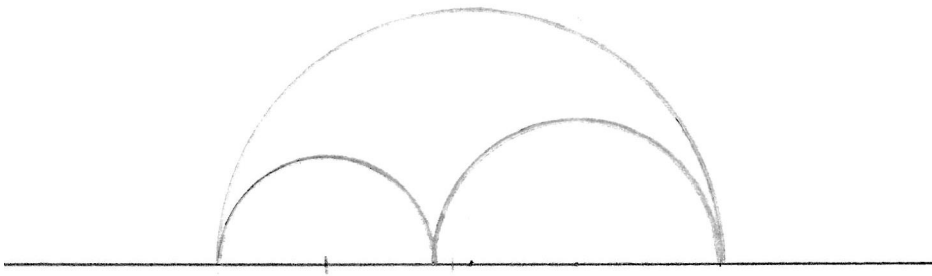


Σχήμα 6: Υπερβολικά τρίγωνα.

Θα θεωρήσουμε επίσης **ιδεατά (υπερβολικά) τρίγωνα**, με μία, δύο ή τρεις κορυφές στο $\partial\mathcal{H}$.



Σχήμα 7: Ιδεατά υπερβολικά τρίγωνα.

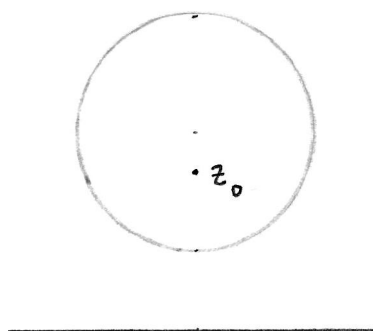


Σχήμα 8: Ιδεατό υπερβολικό τρίγωνο, με τρεις κορυφές στο $\partial\mathcal{H}$.

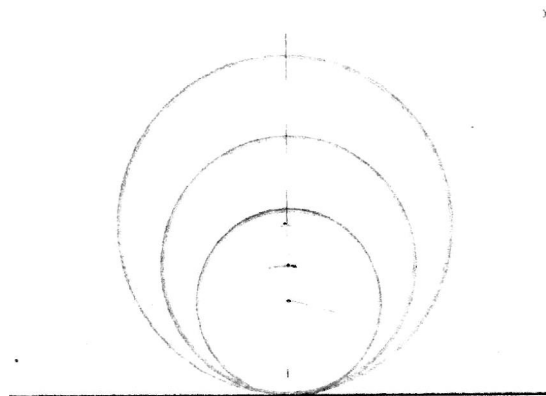
Ένας **υπερβολικός κύκλος** είναι ένας ευκλείδειος κύκλος που περιέχεται στο $\mathcal{H}$. Θα δούμε αργότερα ότι ένας υπερβολικός κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του $\mathcal{H}$ που απέχουν σταθερή υπερβολική απόσταση από ένα σημείο, που όμως είναι διαφορετικό από το ευκλείδειο κέντρο του κύκλου.

Ένας **ορίκυκλος** είναι ένας ευκλείδειος κύκλος στο $\overline{\mathcal{H}}$ που εφάπτεται στο $\partial\mathcal{H}$. Ειδική περίπτωση ορίκυκλου είναι οι ευκλείδειες ευθείες $\{z \in \mathcal{H} : \text{Im } z = \lambda\}$, που “εφάπτονται” στο ∞ .

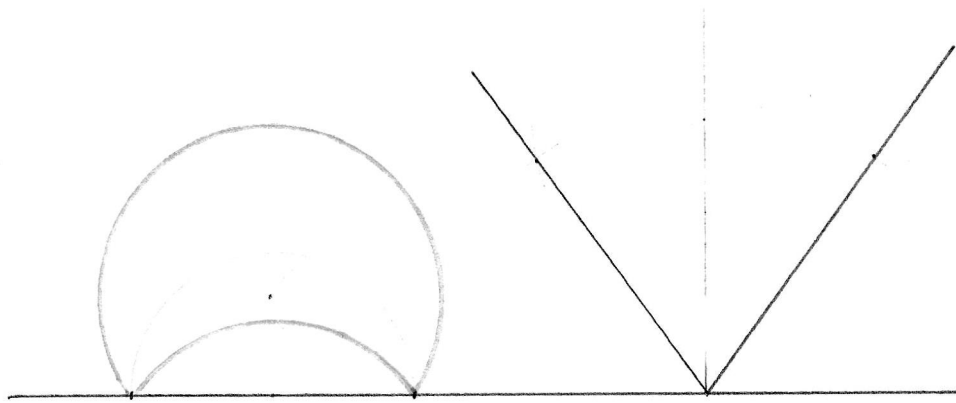
Εάν ένας κύκλος με κέντρο $z_0 \notin \mathbb{R}$ τέμνει το $\mathbb{R}$ σε δύο σημεία, το τόξο που περιέχεται στο $\mathcal{H}$ ονομάζεται **υπέρχυκλος**. Ειδική περίπτωση υπέρκυκλου είναι και οι ημιευθείες που περιέχονται στο $\mathcal{H}$, ευθειών που δεν είναι κάθετες στο $\partial\mathcal{H}$.



Σχήμα 9: Υπερβολικός κύκλος.



Σχήμα 10: Ορίκυκλοι στο υπερβολικό επίπεδο.



Σχήμα 11: Υπέρκυκλοι στο υπερβολικό επίπεδο.

Ασκήσεις

Άσκηση 1 Σχεδιάστε τις υ-ευθείες ε_0 , ε_{-2} , $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{-3,2}$ και $\varepsilon_{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}}$.

Ποιές από αυτές είναι ασύμπτωτες παράλληλες; Ποιές είναι υπερπαράλληλες;

Άσκηση 2 Βρείτε και σχεδιάστε τις υ-ευθείες που περνούν από τα σημεία

1. i και $2i$,
2. i και $\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$,
3. $3 + 2i$ και $2 + 5i$.

Άσκηση 3 Βρείτε τα πέρατα των υ-ευθειών στην Άσκηση 2

Άσκηση 4 Σχεδιάστε τις υ-ευθείες με πέρατα $(2, 3)$, $(3, \infty)$, $(-1, 2)$ και $(\infty, -2)$.

Άσκηση 5 Δίδεται η υ-ευθεία $\varepsilon_{2,3}$ και το σημείο $w_0 = 2 + i$. Από το σημείο w_0 υπάρχουν ακριβώς δύο υ-ευθείες ασύμπτωτες παράλληλες στην $\varepsilon_{2,3}$ και άπειρες υ-ευθείες υπερπαράλληλες προς την $\varepsilon_{2,3}$. Βρείτε τα πέρατα των δύο ασύμπτωτων παράλληλων υ-ευθειών, και μία παραμετρική έκφραση για τα πέρατα των υπερπαράλληλων.