

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 4.2

Γεωμετρικές Κατασκευές

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Η διαδικασία της κατασκευής

Η διαδικασία της κατασκευής διακρίνεται στην **ανάλυση**, τη **σύνθεση**, την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

Αν. Στην ανάλυση θεωρούμε ότι έχει κατασκευαστεί το ζητούμενο σχήμα και το σχεδιάζουμε. Προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες που ανάγουν την κατασκευή των ζητούμενων στοιχείων σε θεμελιώδεις γεωμετρικές κατασκευές ή σε κατασκευές που ήδη γνωρίζουμε. Η ανάλυση στοχεύει να μας υποδείξει το δρόμο για τη λύση του προβλήματος.

Η διαδικασία της κατασκευής

Σύν. Στη σύνθεση, ακολουθώντας τα στοιχεία που αναδείχθηκαν κατά την ανάλυση, περιγράφουμε τις επί μέρους κατασκευές που οδηγούν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Στη διάρκεια της σύνθεσης πρέπει να προσέξουμε οτι ξεκινάμε μόνο με τα δεδομένα στοιχεία και χρησιμοποιούμε σε κάθε φάση μόνον αυτά που έχουμε ήδη κατασκευάσει

Η διαδικασία της κατασκευής

Απ. Αφού ολοκληρώσουμε τη σύνθεση, αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες. Η απόδειξη συχνά ακολουθεί τη λογικά αντίστροφη πορεία της ανάλυσης.

Διερ. Με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις ή να μην υπάρχει καμία λύση. Στη διερεύνηση αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα για να υπάρχει λύση, και εξετάζουμε την ύπαρξη περισσότερων λύσεων.

Κατασκευές τριγώνων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τρίγωνο όταν δίδονται τα μήκη τριών πλευρών.

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τρίγωνο όταν δίδονται τα μήκη δύο πλευρών και η γωνία που περιέχουν.

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τρίγωνο όταν δίδονται τα μήκη δύο πλευρών και μία γωνία που δεν περιέχεται στις δύο πλευρές.

Κατασκευές τριγώνων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τρίγωνο όταν δίδεται η περίμετρος και δύο γωνίες του.

Αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα πιο αναλυτικά.

Δίδεται ένα ευθύγραμμο τμήμα PQ και δύο γωνίες $\angle\beta$, $\angle\gamma$. Να κατασκευάσουμε τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $|AB| + |BC| + |CA| = |PQ|$, $\angle ABC = \angle\beta$ και $\angle ACB = \angle\gamma$.

Κατασκευές τριγώνων

Κατασκευή

Δίδονται τρία σημεία D , T και S . Να κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε D είναι σημείο της ευθείας BC και BT , CS είναι τα ύψη προς τις δύο ίσες πλευρές.

Κατασκευές ορθογώνιων τριγώνων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου δίδεται μία κάθετος πλευρά c και η υποτείνουσα a .

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο όταν δίδεται η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία.

Κατασκευή εφαπτομένων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τις εφαπτόμενες κύκλου από σημείο εξωτερικό του κύκλου.

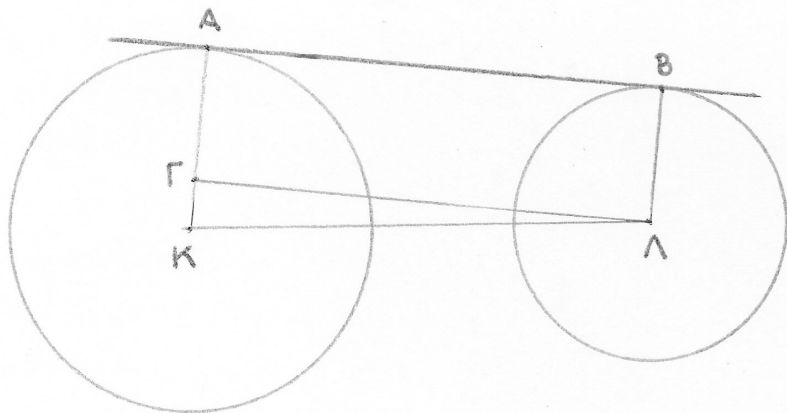
Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τις κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων (K, r) και (L, s) .

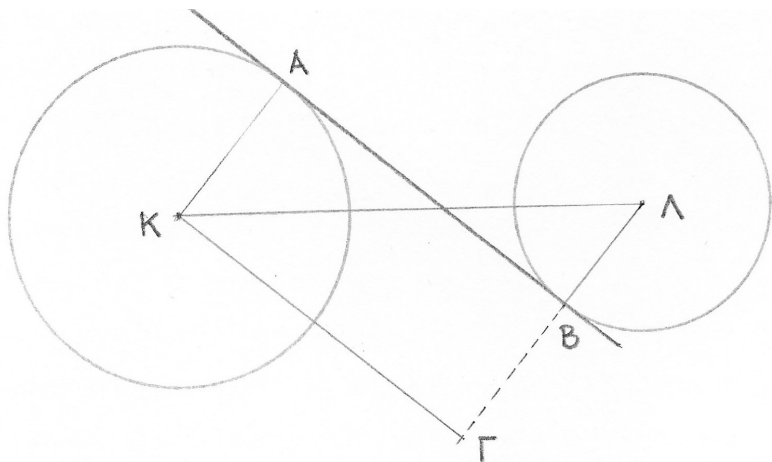
Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου $|KL| > r + s$, και οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία. Τότε υπάρχουν 4 κοινές εφαπτόμενες, δύο που αφήνουν τα κέντρα των δύο κύκλων από την ίδια μεριά και δύο που διέρχονται μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων.

Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων



Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων, 1.

Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων



Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων, 2.

Κατασκευή κύκλου με δεδομένη εφαπτομένη

Κατασκευή

Δίδονται έξι σημεία A, B, C, D, E, F . Να κατασκευάσουμε κύκλο που διέρχεται από το σημείο A , ο οποίος έχει ακτίνα ίση με $|CE|$ και τέτοιος ώστε η εφαπτομένη από το B να έχει μήκος $|DF|$.

Τετραγωνισμός ορθογωνίου

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε τετράγωνο με εμβαδόν ίσο προς το εμβαδόν δεδομένου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Εάν συμβολίσουμε με a και b τις πλευρές του ορθογωνίου, το πρόβλημα μεταφράζεται στην εύρεση της θετικής λύσης της εξίσωσης $x^2 = ab$.

Κατασκευή ορθογωνίων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με δεδομένη περίμετρο, με εμβαδόν ίσο προς το εμβαδόν δεδομένου τετραγώνου.

Εάν συμβολίσουμε $2a$ την περίμετρο του ορθογωνίου, και d την πλευρά του τετραγώνου, η κατασκευή μεταφράζεται στην εύρεση των λύσεων της εξίσωσης $x(a - x) = d^2$ με γεωμετρικό τρόπο.

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, για $\alpha\beta < 0$ και $\alpha\gamma > 0$ μπορεί να προσεγγιστεί με αυτόν τον τρόπο.

Κατασκευή ορθογωνίων

Κατασκευή

Να κατασκευάσουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με δεδομένη περίμετρο, εγγεγραμμένο σε δεδομένο κύκλο.

Η χρυσή τομή

Η διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε “μέσο και άκρο λόγο” είναι το πρόβλημα της διαίρεσης ενός τμήματος σε δύο μέρη έτσι ώστε το αρχικό τμήμα προς το μεγαλύτερο μέρος να έχει τον ίδιο λόγο με το μεγαλύτερο προς το μικρότερο μέρος.

Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό τμήμα έχει μήκος α , θέλουμε να το διαιρέσουμε σε δύο τμήματα με μήκος x το μεγαλύτερο (ο μέσος λόγος) και $\alpha - x$ το μικρότερο (ο άκρος λόγος), έτσι ώστε

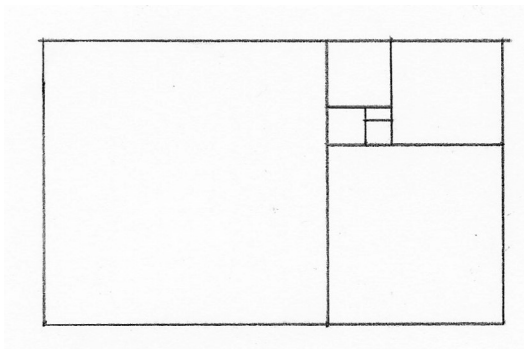
$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}.$$

Οι αρχαίοι Έλληνες θεώρησαν ότι αυτός ο λόγος αντιπροσωπεύει μία ιδιαίτερη αισθητική αξία.

Είναι αλήθεια ότι εμφανίζεται σε πολλά φαινόμενα στη φύση.

Η χρυσή τομή

Εάν αφαιρέσουμε ένα τετράγωνο πλευράς x από ένα ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος a και x , το σχήμα που απομένει είναι πάλι ένα ορθογώνιο όμοιο με το αρχικό. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε μία έλικα από όμοια ορθογώνια.

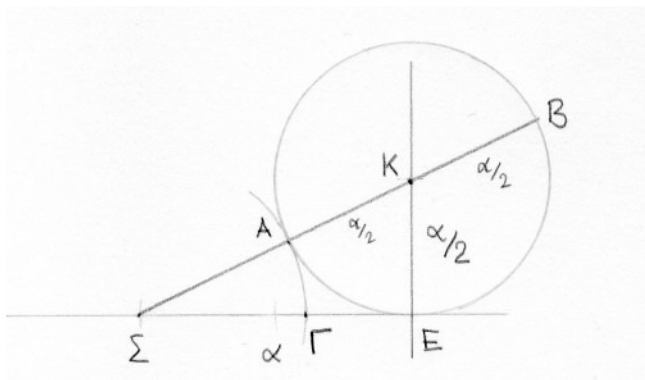


Σχῆμα: Όμοια ορθογώνια με πλευρές σε χρυσή αναλογία.

Κατασκευή της χρυσής τομής

Κατασκευή

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο.



Σχήμα: Κατασκευή της χρυσής τομής: Διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο.

Κατασκευή τριγώνου (5, 5, 10)

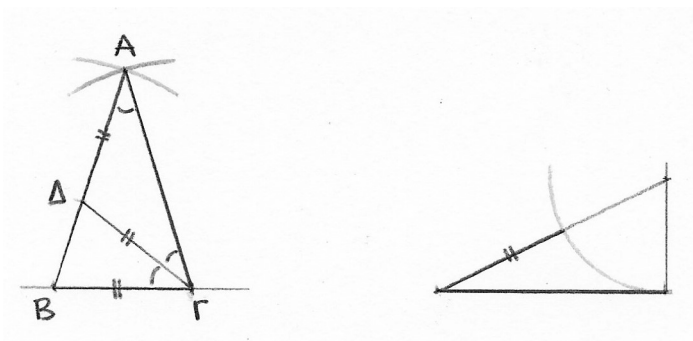
Θα κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο με γωνία 36 μοιρών στην κορυφή. Τότε οι γωνίες στη βάση είναι 72 μοίρες. Αυτό το τρίγωνο χρησιμοποιείται στην κατασκευή κανονικού πενταγώνου.

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία 36 μοιρών στην κορυφή A χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι η διχοτόμος $\Gamma\Delta$ σχηματίζει ένα τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ όμοιο με το αρχικό, και $A\Delta = \Gamma\Delta = \Gamma B$. Από τα όμοια τρίγωνα έχουμε $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$, και αφού $A\Gamma = AB$, $B\Gamma = A\Delta$, έχουμε

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta B},$$

δηλαδή το Δ διαιρεί το AB σε μέσο και άκρο λόγο.

Κατασκευή τριγώνου (5, 5, 10)



Σχῆμα: Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής 36 μοιρών.

Κατασκευή τριγώνου (5, 5, 10)

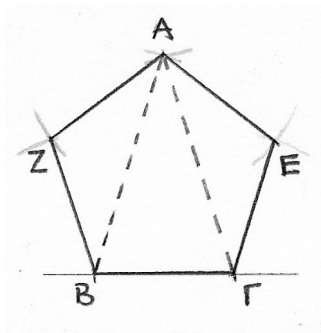
Για να κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο με γωνία 36 μοιρών στην κορυφή θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB , και το διαιρούμε σε μέσο και άκρο λόγο, σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή, έτσι ώστε $|A\Delta|^2 = |AB| |\Delta B|$.

Η τρίτη κορυφή Γ του τριγώνου είναι το σημείο που απέχει $|AB|$ από το A και $|A\Delta|$ από το B .

Κατασκευή κανονικού πενταγώνου

Εάν στην AB κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο ABZ με $AZ = BZ = A\Delta$, και στην $A\Gamma$ κατασκευάσουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma E$ με $AE = \Gamma E = A\Delta$, το πολύγωνο $AZB\Gamma E$ είναι κανονικό πεντάγωνο, αφού όλες οι πλευρές είναι ίσες με $A\Delta$ και όλες οι γωνίες 108 μοίρες.

Κατασκευή κανονικού πενταγώνου



Σχήμα: Κατασκευή κανονικού πενταγώνου.

Βιβλιογραφία

Κουρουνιώτης, Χ., (2023) Προσωρινές Σημειώσεις μαθήματος MEM203
Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδακτική της. Πανεπιστήμιο Κρήτης.
<http://users.math.uoc.gr/~chrisk/Euclidean2023-h.pdf>