Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 3.2
Η διδασκαλία της απόδειξης

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Η διδασκαλία της απόδειξης

Η M.Lampert περιγράφει πώς παρουσιάζεται η απόδειξη στο σχολείο:

> *Οι μαθήτριες πρέπει να αποστηθίσουν τους ορισμούς και τις συμβάσεις του συμβολισμού. Το θεώρημα δίδεται στη μορφή ''Εάν ..., τότε ....'' Γράφουν τα ''δεδομένα'' και μία σειρά από προτάσεις, με τις αιτιολογήσεις τους, που καταλήγουν στα ''ζητούμενα''.*

Αυτοί οι κανόνες δεν υποστηρίζουν τις μαθήτριες στη διαδικασία των δημιουργικών συλλογισμών που απαιτούνται για να ανακάλυψουν δικά τους επιχειρήματα.

Θα εξετάσουμε κάποια πρόσφατα ερευνητικά άρθρα που αναφέρονται σε διδακτικές παρεμβάσεις που στοχεύουν να μελετήσουν προβλήματα στη διδασκαλία της απόδειξης.

Η αναγκαιότητα της απόδειξης

Ένα από τα κύρια προβλήματα είναι να αντιληφθούν οι μαθήτριες την αναγκαιότητα της απόδειξης, όταν τα αποτελέσματα είναι διαισθητικά προφανή ή επαληθεύονται από την εμπειρία τους.

Η Orit Zaslavsky και η Orly Buchbinder παρουσιάζουν προβλήματα που στοχεύουν να αναδείξουν την αναγκαιότητα της απόδειξης. Ονομάζουν το είδος αυτών των προβλημάτων ''Είναι αυτό μία σύμπτωση;''

Η αναγκαιότητα της απόδειξης

Τα προβλήματα παρουσιάζουν τις πράξεις και παρατηρήσεις μίας υποθετικής μαθήτριας, σε σχέση με ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό παράδειγμα.

Το ερώτημα είναι εάν το φαινόμενο που παρατηρεί η μαθήτρια ισχύει γενικότερα ή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Για την απάντησή του, πρέπει είτε να αποδειχθεί οτι το φαινόμενο ισχύει ή να παρουσιαστεί ένα αντιπαράδειγμα.

Όλα τα προβλήματα αναφέρονται σε υπαρκτά φαινόμενα, τα οποία μπορεί να είναι αναγκαίες συνέπειες της κατάστασης που περιγράφεται ή να ισχύουν μόνο σε κάποιες περιπτώσεις, να είναι σύμπτωση.

Η αναγκαιότητα της απόδειξης

Στόχος είναι να εστιαστεί η προσοχή των ατόμων που συμμετέχουν στην έρευνα στην προσπάθεια να διατυπώσουν μία πρόταση και να την αιτιολογήσουν, μέσω μίας απόδειξης ή ενός αντιπαραδείγματος.

Τα δεδομένα συνελέγησαν από δύο ομάδες: μία ομάδα 12 μαθητριών και μαθητών Λυκείου, με καλή επίδοση, και μία ομάδα 6 έμπειρων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας με καλή γνώση Μαθηματικών.

Το ορθογώνιο τρίγωνο

Πρόβλημα

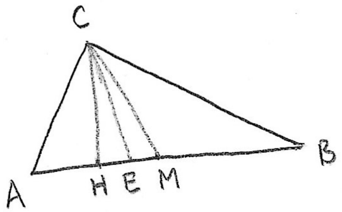
Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα μη ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ABC, τη διάμεσο CM, το ύψος CH και τη διχοτόμο CE προς την υποτείνουσα.

Παρατήρησε οτι CE βρίσκεται μεταξύ των CH και CM. Μέτρησε τις γωνίες και διαπίστωσε οτι η CE διχοτομεί τη γωνία $\angle HCM$.

Είναι αυτό σύμπτωση;

Το ορθογώνιο τρίγωνο

Σε αυτό το πρόβλημα, η αντίδραση του Ben και της Kerry ήταν ισχυρή αμφιβολία για τη γενικότητα του αποτελέσματος.

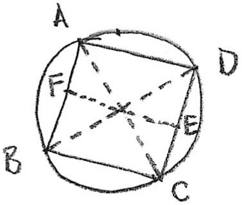


Μετά από πολύ ώρα, με εμπειρικές και θεωρητικές προσεγγίσεις, κατάφεραν να βρουν την απάντηση.

Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Πρόβλημα

Μία μαθήτρια σχεδίασε ένα τετράπλευρο ABCD, εγγεγραμμένο σε κύκλο, με τις διαγώνιες να τέμνονται κάθετα. Από το μέσο F της AB σχεδίασε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων και τέμνει την πλευρά CD στο E.
Μέτρησε τα μήκη και βρήκε οτι CE = ED.
Είναι αυτό σύμπτωση;



Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Σε αυτό το πρόβλημα, η αντίδραση του Alan και του David ήταν μέτρια αμφιβολία. Προσπάθησαν να δουν τι ισχύει για ορθογώνιο και ρόμβο, αλλά κατέληξαν οτι δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες.

Όταν τελικά σχεδίασαν ρομβοειδές (διαδοχικές πλευρές ίσες ανά δύο), το οποίο αρχικά θεώρησαν οτι δεν μπορεί να είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, βρήκαν οτι δεν ισχύει γενικά.

Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Η αρχική αντίδραση της Gila και της Tami ήταν ισχυρή βεβαιότητα για τη γενικότητα του αποτελέσματος.

Μετά από συζήτηση, η Tami δήλωσε οτι ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγωνίους είναι υποχρεωτικά ρόμβος. Δεχόμενες αυτό, παρατήρησαν οτι ένας ρόμβος εγγράφεται σε κύκλο μόνον εάν είναι τετράγωνο και απέδειξαν οτι ισχύει ο ισχυρισμός.

Σε αυτή την περίπτωση η ισχυρή βεβαιότητα που προέκυψε από το σχέδιο, οδήγησε την Tami σε εσφαλμένο ισχυρισμό.

Το εμβαδόν των τριγώνων

Το επόμενο πρόβλημα τέθηκε στην ομάδα των εκπαιδευτικών.

Πρόβλημα

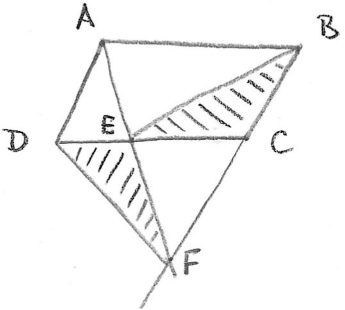
Μία μαθήτρια διάλεξε ένα σημείο E στην πλευρά CD ενός παραλληλογράμμου $ABCD$, και προέκτεινε την AE μέχρι το F στην ευθεία BC.

Υπλόγισε τα εμβαδά των τριγώνων DEF και BCE και βρήκε οτι είναι ίσα.

Είναι αυτό σύμπτωση;

Το εμβαδόν των τριγώνων

Σε αυτό το πρόβλημα τα άτομα που συμμετείχαν εξέφρασαν ισχυρή αμφιβολία.



Το εμβαδόν των τριγώνων

Προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν αναλογίες μεταξύ των υψών των τριγώνων, και βρήκαν μία ικανή συνθήκη, αλλά καθώς δεν ήταν βέβαια για την αλήθεια της πρότασης, δεν έβρισκαν επιχειρήματα για να αποδείξουν οτι ισχύει.

Η ερευνήτρια τους έδειξε σε ψηφιακό περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας οτι το αποτέλεσμα πράγματι γενικεύεται.

Το εμβαδόν των τριγώνων

Μετά που διαπίστωσαν πειραματικά οτι ισχύει η ισότητα, συνέχισαν με ενθουσιασμό να αναζητούν τη λύση.
Μετά από αυτό μία καθηγήτρια βρήκε την απάντηση:

$$\begin{aligned} \text{Εμβ}\, ADF &= \text{Εμβ}\, DBC \\ \text{Εμβ}\, ADE &= \text{Εμβ}\, DBE \end{aligned}$$

και από τη διαφορά, Εμβ DEF = Εμβ BCE.

‘‘Αυθεντικές’’ αποδείξεις

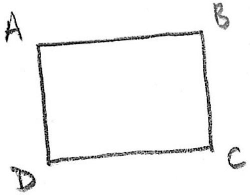
Η M.Cirillo και ο P.Herbst παρουσιάζουν προβλήματα που στοχεύουν να κάνουν τις μαθήτριες να έχουν μεγαλύτερη εμπλοκή στη διαδικασία της απόδειξης.

Ειδικότερα, θεωρούν οτι οι μαθήτριες πρέπει να εμπλακούν στη σημαντική εργασία της διατύπωσης εικασιών, της κατασκευής και προσεκτικής ανάλυσης της απόδειξης, η οποία απουσιάζει από τη διδασκαλία της απόδειξης (στις ΗΠΑ, αλλά και ευρύτερα).

Διατύπωση της Πρότασης

Πρόβλημα

Υπόθεσε οτι διατυπώνεις την εικασία οτι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες, και σχεδιάζεις το διάγραμμα.



Γράψε τα δεδομένα και τα συμπεράσματα για να αποδείξεις αυτή την εικασία.

Σχεδίαση σχήματος

Πρόβλημα

Σχεδίασε το σχήμα για να αποδείξεις την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Στο παραλληλόγραμμο $PQRS$, T *είναι το μέσο του* PQ *και* V *το μέσο του* SR. *Δείξε οτι* $ST = QV$.

Αναλυτική έκφραση μίας πρότασης

Πρόβλημα

Βρες τα δεδομένα, το συμπέρασμα και σχεδίασε το σχήμα για το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα

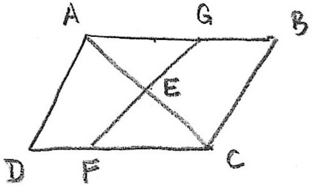
Εάν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Συμπεράσματα από τα δεδομένα

Πρόβλημα

Τι συμπέρασμα μπορείς να βγάλεις από τα δεδομένα;

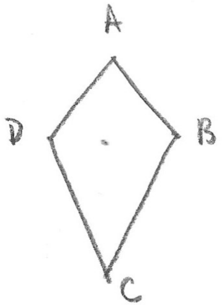
$ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο και FG διχοτομείται από την AC.



Βοηθητική ευθεία

Πρόβλημα

Ποιά βοηθητική ευθεία πρέπει να φέρεις για να λύσεις το ακόλουθο πρόβλημα:
Δίδεται τετράπλευρο $ABCD$ με $AD = AB$ και $DC = BC$. Δείξε οτι $\angle B = \angle D$.



Γράφοντας μία εικασία

Πρόβλημα

Θεώρησε ένα τετράπλευρο με δύο ίσες διαδοχικές πλευρές και δύο απέναντι γωνίες ίσες. Η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών δεν είναι μία από τις ίσες γωνίες.

Τι άλλο θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε για αυτό το τετράπλευρο;

Τι θα μπορούσαμε να αποδείξουμε;

Ποιά είναι τα δεδομένα;

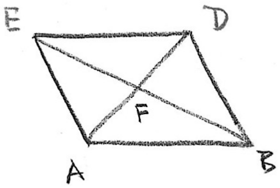
Λάθος στην απόδειξη

Πρόβλημα

Βρες το λάθος στην ακόλουθη απόδειξη.

Πρόταση

Στο διάγραμμα, AB είναι παράλληλο και ίσο με το ED. Δείξε οτι τα τρίγωνα AFB και DFE είναι ίσα.



Λάθος στην απόδειξη

Ἀπόδειξη.

Οι ευθείες AB και ED είναι παράλληλες και τέμνονται από την EB. ’ρα σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, $\angle BAF = \angle EDF$. Είναι δεδομένο οτι $AB = ED$. Και οι γωνίες $\angle AFB$, $\angle DFE$ είναι κατά κορυφήν, συνεπώς είναι ίσες. Από κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα είναι ίσα. □

Μορφές παρουσίασης της απόδειξης

Στην Ελλάδα ο μόνος τρόπος παρουσίασης αποδείξεων στα σχολικά βιβλία είναι ο παραδοσιακός, σε μορφή παραγράφου.

Σε άλλες χώρες χρησιμοποιούνται και άλλες μορφές παρουσίασης αποδείξεων, όπως η απόδειξη σε δύο στήλες και η απόδειξη ως διάγραμμα ροής.

Αυτές οι μορφές παρουσίασης έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά, και ο συνδυασμός τους μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση ενός επιχειρήματος.

Η απόδειξη σε μορφή παραγράφου

Η απόδειξη σε μορφή παραγράφου μοιάζει περισσότερο με μία εξήγηση παρά με μία δομημένη μαθηματική κατασκευή. Αυτό μπορεί να την κάνει πιο οικεία στα παιδιά, αλλά η απουσία δομής μπορεί να είναι και μειονέκτημα.

Σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθήτριες παραλείπουν την αιτιολόγηση των ισχυρισμών τους και οδηγούνται σε λανθασμένα συμπεράσματα.

Η μορφή παραγράφου φαίνεται πιο αυθεντική, καθώς είναι πλησιέστερα στη μορφή που θα χρησιμοποιούσε μία μαθηματικός για να γράψει μία απόδειξη.

Σε κάποιες περιπτώσεις, όπως στην απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο, η μορφή της παραγράφου είναι πιο κατάλληλη από άλλες.

Η απόδειξη σε δύο στήλες

Στην ‘‘απόδειξη σε δύο στήλες’’, στη μία στήλη καταγράφονται τα δεδομένα, οι ενδιάμεσοι ισχυρισμοί και το τελικό συμπέρασμα, ενώ στην άλλη στήλη καταγράφονται οι αιτιολογήσεις για κάθε ισχυρισμό.

Με αυτό τον τρόπο η μαθήτρια βλέπει εάν έχει παραλείψει την αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού.

Μειονέκτημα της απόδειξης σε δύο στήλες είναι οτι δίδει την εντύπωση οτι η παραγωγική διαδικασία είναι πιο γραμμική απ᾽ οτι πράγματι συμβαίνει.

Η απόδειξη σε μορφή διαγράμματος ροής

Η απόδειξη σε μορφή διαγράμματος ροής χρησιμοποιεί τους ίδιους ισχυρισμούς και τις αιτιολογήσεις με την απόδειξη σε δύο στήλες, αλλά η λογική ροή του επιχειρήματος παριστάνεται με βέλη.

Αυτή η μορφή μπορεί να βοηθήσει τις μαθήτριες να επικεντρωθούν σε συγκεκριμένα σημεία της απόδειξης για να ανταλλάξουν ιδέες, και να δούν πώς συνδέονται τα τμήματα της απόδειξης για να κατασκευάσουν το συνολικό επιχείρημα.

Η διδασκαλία της απόδειξης

Η καθηγήτρια των Μαθηματικών πρέπει να διαχειρίζεται ενεργά τη δραστηριότητα της τάξης στην προσπάθεια κατασκευής ή κατανόησης μίας απόδειξης.

Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι η χρήση διαφορετικών μορφών παρουσίασης της απόδειξης.

Εάν οι καθηγήτριες είναι ευέλικτες ως προς τη μορφή της απόδειξης και ταυτόχρονα δίδουν προσοχή στο περιεχόμενο των επιχειρημάτων, μπορούν να βοηθήσουν πιο αποτελεσματικά τις μαθήτριες να κατανοούν και να κατασκευάζουν αποδείξεις.

Καλλιεργώντας την εμπειρική εξέταση

Ο K.Komatsu εξετάζει δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τις μαθήτριες να εξετάσουν κριτικά κάποιες προτάσεις ή τις αποδείξεις τους, με σκοπό να τις βελτιώσουν. Αυτή η έρευνα χρησιμοποιεί το ‘‘πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα’’.

Ένα ‘‘πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα’’ είναι ένα πρόβλημα που ζητά να αποδειχθεί μία πρόταση που αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο διάγραμμα με σύμβολα.

Το "πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα"

Η διατύπωση του προβλήματος αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο η πρόταση ή η απόδειξη να ισχύει για κάποια γενικότερη κλάση διαγραμμάτων, στην οποία ανήκει το συγκεκριμένο.

Το άλλο χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι οτι οι υποθέσεις μπορεί να είναι ασαφείς, επειδή μπορεί να υπάρχουν κρυμμένες υποθέσεις στο διάγραμμα.

Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στις μαθήτριες να εξετάσουν εμπειρικά τα προβλήματα, και να αναδιατυπώσουν τις προτάσεις χρησιμοποιώντας διαφορικά διαγράμματα.

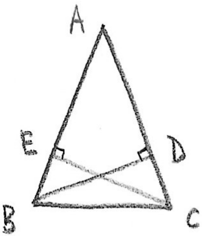
Παράδειγμα προβλήματος απόδειξης με διάγραμμα

Πρόβλημα

Από τις κορυφές B και C ενός ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο διάγραμμα, σχεδιάστε κάθετες BD και CE προς τις AC και AB αντίστοιχα.

Δείξτε οτι $BD = CE$.

Παράδειγμα προβλήματος απόδειξης με διάγραμμα

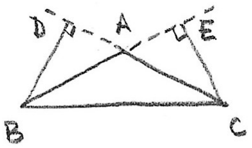


Στο διάγραμμα υπάρχει η κρυμμένη υπόθεση οτι οι κάθετες BD και CE τέμνουν τις απέναντι πλευρές του τριγώνου.

Ο ρόλος της καθηγήτριας

Για να προχωρήσει η εμπειρική εξέταση, χρειάζεται να γίνουν κατάλληλες παρεμβάσεις από την καθηγήτρια, ώστε να συνεχίσουν οι μαθήτριες την εξερεύνηση μετά που έχουν δώσει την απόδειξη.

Σε αυτό το πρόβλημα η καθηγήτρια μπορεί να ζητήσει να σχεδιάσουν οι μαθήτριες δικά τους διαγράμματα, ή να σχεδιάσει εκείνη κατάλληλα, ώστε να αναδειχθούν οι κρυμμένες υποθέσεις.



Επίσης πρέπει να κατευθύνει τις μαθήτριες να εξετάσουν τις προτάσεις και τις αποδείξεις υπό την οπτική των νέων διαγραμμάτων.

2ο Πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα

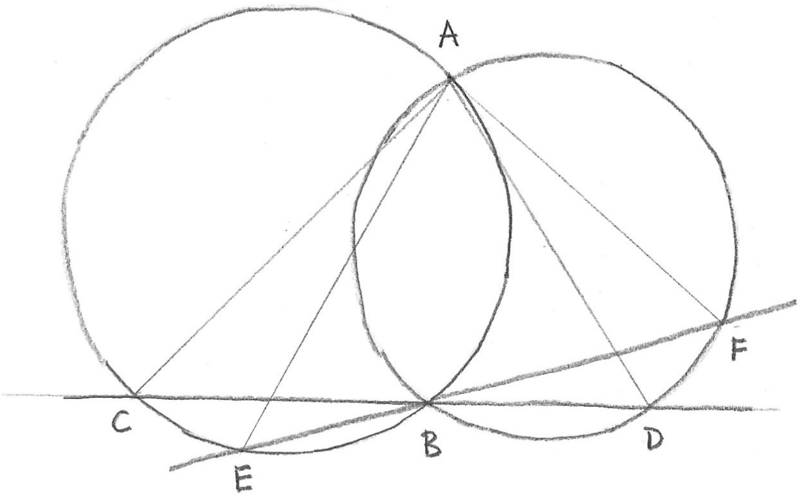
Πρόβλημα

Δύο κύκλοι (K, KA) *και* (L, LA) *τέμνονται στα σημεία* A *και* B, *όπως στο διάγραμμα.*

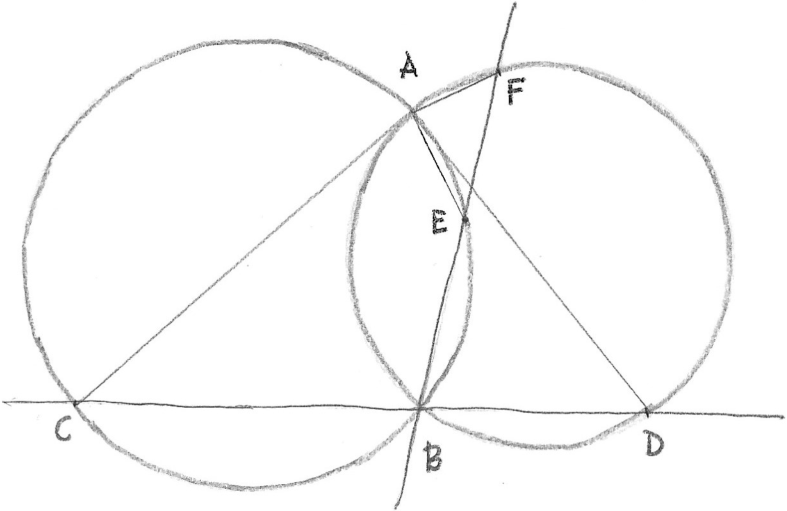
Η ευθεία ε *διέρχεται από το* B *και τέμνει τους κύκλους* (K, KA) *και* (L, LA) *σε σημεία* C *και* D *αντίστοιχα. Παρόμοια, η ευθεία* δ *διέρχεται από το* B *και τέμνει τους κύκλους* (K, KA) *και* (L, LA) *σε σημεία* E *και* F *αντίστοιχα.*

Δείξτε οτι τα τρίγωνα ACD *και* AEF *είναι όμοια.*

2ο Πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα



2ο Πρόβλημα απόδειξης με διάγραμμα



Βιβλιογραφία

Buchbinder, O., Zaslavsky, O. Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. ZDM Mathematics Education 43, 269 (2011).

M.Cirillo and P.Herbst, Moving toward more authentic proof practices in Geometry. The Mathematics Educator, 21, 2011.

K.Komatsu, Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics.* 96, 2017.

Βιβλιογραφία

Stylianides A.J., Bieda K.N., Morselli F. (2016) Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. In: Gutierrez A., Leder G.C., Boero P. (eds) *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education.* SensePublishers, Rotterdam.

Stylianides, A.J., Komatso, K., Weber, K., Stylianides, G.J. (2022) Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving. In Danesi, M., (Ed.) *Handbook of Cognitive Mathematics*, Springer.

Βιβλιογραφία

Stylianides A.J., Stylianides G.J. (2022) On the Meanings of Argumentation, Justification, and Proof: General Insights from Analyses of Elementary Classroom Episodes. In: Bieda K.N., Conner A., Kosko K.W., Staples M. (eds) *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof.* Research in Mathematics Education. Springer, Cham.