

# Η Διδακτική της Γεωμετρίας

## Διάλεξη 2.1

### Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

## Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Τα “Στοιχεία” γράφτηκαν γύρω στο 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια.

Σε αυτά συντίθενται τα μέχρι τότε γνωστά Μαθηματικά σε ένα συνεκτικό λογικό πλαίσιο, στο οποίο κάθε αποτέλεσμα προκύπτει λογικά από τα προηγούμενα, αρχίζοντας με ένα μικρό αριθμό *αιτημάτων* που θεωρούνται προφανή.

Αυτή η εργασία δείχνει τη βαθιά γνώση όσων είχαν προηγηθεί και εξαιρετική συνθετική ικανότητα.

Αξίζει να επισημανθεί η συστηματικότητα στη διαδοχή των ορισμών και των αιτημάτων, καθώς και στην προετοιμασία των αποδείξεων.

## Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Ιδιαίτερη συμβολή του Ευκλείδη φαίνεται ότι είναι η διατύπωση του 5ου αιτήματος, στο οποίο θα αναφερθούμε επανειλημμένα.

Το αίτημα χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στην Πρόταση κθ' (29) του πρώτου βιβλίου, παρ' όλο που θα απλοποιούσε τις αποδείξεις προηγούμενων προτάσεων.

Φαίνεται ότι ο Ευκλείδης αντιλαμβανόταν τον ιδιαίτερο χαρακτήρα αυτού του αιτήματος, και καθυστέρησε να το χρησιμοποιήσει όσο ήταν δυνατό. Η Πρόταση κθ' δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς το 5ο αίτημα ή κάποια αντίστοιχη υπόθεση.

## Τα 13 βιβλία

Τα “Στοιχεία” αποτελούνται από 13 βιβλία.

Στα πρώτα 6 αναπτύσσεται η γεωμετρία του επιπέδου και η θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου.

Τα βιβλία 7, 8 και 9 αναφέρονται σε ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όπως η διαιρετότητα.

Το δέκατο βιβλίο αναπτύσσει τη θεωρία του Θεαίτητου για μία γεωμετρική προσέγγιση των αρρήτων αριθμών.

## Τα 13 βιβλία

Τέλος στα τρία τελευταία βιβλία παρουσιάζεται η γεωμετρία του χώρου, ο υπολογισμός του όγκου στερεών και η ταξινόμηση των κανονικών στερεών, που λέγονται και Πλατωνικά.

Στη συνέχεια παραθέτουμε, στο πρωτότυπο, κάποια αποσπάσματα από το πρώτο βιβλίο των “Στοιχείων”.

# Οι ορισμοί

Στην αρχή του βιβλίου διατυπώνονται 23 ορισμοί.

## ΟΡΟΙ

- Ⓐ Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
- Ⓑ Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
- ⒞ Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
- Ⓒ Εὐθεία γραμμὴ ἐστιν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
- ...

## Οι ορισμοί

Στον 10ο Όρο, δίδεται ο ορισμός των καθέτων ευθειών, και στον 23ο ο ορισμός των παραλλήλων:

- ι'. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῆ, ὀρθή ἐκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.  
...
- κγ'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

# Τα “αιτήματα”

Στη συνέχεια έχουμε τα 5 αιτήματα (αξιώματα σχετικά με γεωμετρικές έννοιες).

## ΑΙΤΗΜΑΤΑ

- Ⓐ Ἡιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- Β Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- Γ Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
- δ Καὶ πάσας τας ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Τα τρία πρώτα αιτήματα αφορούν στη δυνατότητα κατασκευής (την ύπαρξη) ευθειών και κύκλων. Το τέταρτο αίτημα δηλώνει οτι όλες οι ὀρθές γωνίες είναι ίσες.



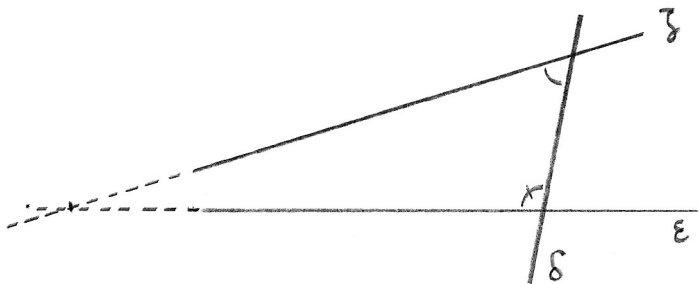
## Το “5ο αίτημα”, των παραλλήλων

Το πέμπτο αίτημα αναφέρεται στις παράλληλες ευθείες. Η διατύπωσή του είναι ισοδύναμη με την πιο συνηθισμένη σήμερα διατύπωση, ότι από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος προς την ευθεία.

- Καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ’ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ’ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

## Το “5ο αίτημα”, των παραλλήλων

(Εάν δύο ευθείες τέμνονται από ευθεία και οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε εάν επεκταθούν οι ευθείες θα έχουν κοινό σημείο προς τη μεριά που βρίσκονται οι γωνίες που είναι μικρότερες από δύο ορθές.)



Σχήμα: Το αίτημα των παραλλήλων.

## Οι κοινές έννοιες

Οι κοινές έννοιες περιλαμβάνουν προφανείς, αναπόδεικτες ιδιότητες με γενικώτερη εφαρμογή, όπως η έννοια της ισότητας, ή η μεταβατικότητα.

### ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

- α' Τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
- β' Καὶ ἐάν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

...

## Οι κοινές έννοιες

- ⊕ Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.  
...
- ⊖ Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Ἡ κοινὴ ἐννοια θ' ἐξασφαλίζει ὅτι μόνο μία εὐθεῖα περνάει ἀπὸ δύο διαφορετικὰ σημεῖα.

Ἰδιαιτέρη σημασία γιὰ τὴν Ευκλείδεια Γεωμετρία ἔχει ἡ κοινὴ ἐννοια ζ', ἡ ὁποία ὀρίζει τὴν ἰσότητα γεωμετρικῶν σχημάτων μέσω τῆς εφαρμογῆς.

Θα δούμε πῶς χρησιμοποιεῖται ἡ εφαρμοσιμότητα στὴν ἀπόδειξη τοῦ πρώτου κριτηρίου ἰσότητας τριγώνων, στὴν Πρόταση δ' τοῦ Βιβλίου α'.

# Εφαρμοσιμότητα

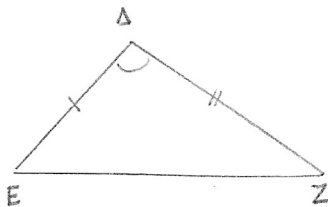
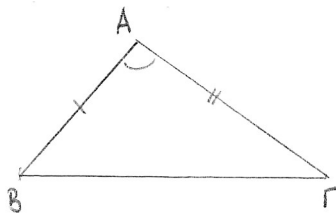
## Πρόταση

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοῖ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκάτεραν ἑκάτερα καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνία ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκάτερα ἑκάτερα, ὅφ' ἅς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

(Εάν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές ίσες, μία προς μία, και έχουν ίσες τις γωνίες που περιέχονται μεταξύ των ίσων πλευρών, τότε και η βάση είναι ίση προς τη βάση, και το τρίγωνο είναι ίσο προς το τρίγωνο, και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ίσες, μία προς μία, προς αυτές που βρίσκονται απέναντι στις ίσες πλευρές.)

## Απόδειξη με “εφαρμογή”

Στην απόδειξη της Πρότασης δ' χρησιμοποιείται η έννοια της “εφαρμογής”. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται το ένα τρίγωνο, έστω  $ΑΒΓ$ , στο άλλο,  $ΔΕΖ$ , έτσι ώστε να συμπίσει το  $Α$  με το  $Δ$ , και η ευθεία  $ΑΒ$  με την ευθεία  $ΔΕ$ .



Σχῆμα: Απόδειξη με εφαρμογή.

## Απόδειξη με “εφαρμογή”

Η ισότητα των μηκών  $AB$  και  $DE$  συνεπάγεται ότι το  $B$  εφαρμόζει στο  $E$ .

Η ισότητα των γωνιών  $\angle A$  και  $\angle D$  συνεπάγεται ότι η ημιευθεία  $AG$  εφαρμόζει στην ημιευθεία  $DZ$ .

Η ισότητα των μηκών  $AG$  και  $DZ$  συνεπάγεται ότι το  $G$  εφαρμόζει στο  $Z$ .

Συμπεραίνεται ότι το τρίγωνο  $ABG$  είναι ίσο με το τρίγωνο  $DEZ$ .

## Απόδειξη με “εφαρμογή”

Αλλά δεν δίδεται κάποια αιτιολόγηση για το συμπέρασμα ότι οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι ίσες.

Μία γενικότερη κριτική της απόδειξης με εφαρμογή είναι ότι η χρήση της έννοιας της εφαρμογής προϋποθέτει τη μετακίνηση για την εφαρμογή, που δεν ορίζεται πουθενά στα Στοιχεία.



## Τομή δύο κύκλων

Στην Πρόταση α', την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου, θεωρείται προφανές ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται σε ένα σημείο. Αλλά στα αιτήματα δεν υπάρχει κάποια πρόταση για την τομή δύο κύκλων.

Εδώ έχουμε μία περίπτωση όπου η διαίσθηση του φυσικού κόσμου συμπληρώνει τα αξιώματα.

## Τομή δύο κύκλων

Πώς μπορεί να μην τέμνονται δύο κύκλοι;

Πρώτον εάν οι σχέσεις της απόστασης των κέντρων τους και των ακτίνων τους δεν ικανοποιεί τις κατάλληλες συνθήκες. Αυτές ικανοποιούνται στην συγκεκριμένη περίπτωση.

Ένα άλλο πρόβλημα είναι εάν υπάρχει το σημείο τομής. Στα αιτήματα δεν υπάρχει κάτι ανάλογο του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Αυτό συμπληρώνεται από τη φυσική διαίσθηση.

Εάν όμως θεωρήσουμε το επίπεδο των σημείων με ρητές συντεταγμένες, τότε το ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$  και  $(1, 0)$  θα είχε τρίτη κορυφή  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  που δεν είναι σημείο του επιπέδου.

## Βιβλιογραφία

Heiberg, I.L., Stamatis, E.S. Euclides Elementa, vol. I – VI, 1969, Teubner, Leipzig.

Ροκοπάνος, Ν., Σακελλάρη, Σ., Τσολομύτης, Α., Απόδοση των Στοιχείων σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, μαζί με το αρχαίο κείμενο, στην ηλεκτρονική έκδοση

<https://myria.math.aegean.gr/elements/Stoixeia.pdf>

Hartshorne, R., Geometry: Euclid and beyond, 2000, Springer.