Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ο πίνακας της σύνθεσης απεικονίσεων

Θεώρημα

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους V, W και Z πεπερασμένης διάστασης και βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ αντίστοιχα. Εάν $L : V \to W$ και $M : W \to Z$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε

$$[M \circ L]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} = [M]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot [L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}.$$

Απόδειξη:

- Έστω $\tilde{L} = \iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}$ και $\tilde{M} = \iota_{\mathcal{D}} \circ M \circ \iota_{\mathcal{C}}^{-1}$. Τότε $\tilde{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\tilde{M} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$, με αντίστοιχους πίνακες $[L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ και $[M]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}$.
- Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{M} \circ \tilde{L}$ θα αντιστοιχεί στον πίνακα $[M]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot [L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.
- Ακόμα $L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \tilde{L} \circ \iota_{\mathcal{B}}$ και $M = \iota_{\mathcal{D}}^{-1} \circ \tilde{M} \circ \iota_{\mathcal{C}}$, δηλαδή

$$M \circ L = (\iota_{\mathcal{D}}^{-1} \circ \tilde{M} \circ \iota_{\mathcal{C}}) \circ (\iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \tilde{L} \circ \iota_{\mathcal{B}}) = \iota_{\mathcal{D}}^{-1} \circ (\tilde{M} \circ \tilde{L}) \circ \iota_{\mathcal{B}} \iff \tilde{M} \circ \tilde{L} = \iota_{\mathcal{D}} \circ (M \circ L) \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

- Από το τελευταίο παίρνουμε ότι ο πίνακας της απεικόνισης $M \circ L$ (ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{D}$) θα είναι ο πίνακας της απεικόνισης $\tilde{M} \circ \tilde{L}$.
- Το ζητούμενο έπεται συνδυάζοντας τα προηγούμενα.

Πίνακας αντίστροφης απεικόνισης

Πόρισμα

Έστω $L : V \to W$ ισομορφισμός διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης με βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα. Τότε

$$[L^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1}.$$

Απόδειξη:

- Επειδή L ισομορφισμός, έχουμε ότι L αντιστρέψιμη και $L^{-1} \circ L = \mathbf{1}_V$.
- Επομένως, από την προηγούμενη πρόταση,

$$[L^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [L^{-1} \circ L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I,$$

  και το ζητούμενο έπεται.

Ο πίνακας της ταυτοτικής απεικόνισης

- Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τον πίνακα της απεικόνισης $\mathbf{1}\ :\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ και $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$.
- Είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι αυτός ο πίνακας *δεν* θα είναι ο I_2.
- Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\mathbf{1}(1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(1,1),$$
$$\mathbf{1}(0,1) = -1\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1).$$

  Άρα ο πίνακας είναι ο

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης

Ορισμός

Έστω $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ δύο βάσεις του πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V. Ο πίνακας $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ονομάζεται *πίνακας αλλαγής βάσης* ή *πίνακας μετάβασης* από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{C}$.

Έστω $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ δύο βάσεις του πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V. Τα παρακάτω προκύπτουν άμεσα:

- $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I$.
- Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι αντιστρέψιμος.
- $([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = [\mathbf{1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.
- Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας μπορεί να ιδωθεί ως πίνακας αλλαγής βάσης για κάποιες κατάλληλες βάσεις.

Ο πίνακας απεικόνισης ως προς άλλη βάση

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, όπου V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης με βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ αντίστοιχα.
- Αν $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ διαφορετικές βάσεις των V και W, τότε παρατηρούμε ότι μπορούμε να συνδέσουμε τους πίνακες $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $[L]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$ ως εξής:
- Εύκολα βλέπουμε ότι $L = \mathbf{1}_W \circ L \circ \mathbf{1}_V$. Αν είμαστε προσεκτικοί στην επιλογή των βάσεων, βλέπουμε ότι
$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [\mathbf{1}]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [L]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Ένα παράδειγμα

Άσκηση

Έστω η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $ax^2 + bx + c \mapsto ax + c$.

1. Βρείτε τον πίνακα της L ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ και $\mathcal{B}_1 = \{1, x\}$ του $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.
2. Βρείτε τους πίνακες αλλαγής βάσης για τις βάσεις $\mathcal{B}_2' = \{1, x, x^2 + x\}$ του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ και $\mathcal{B}_1' = \{1, x - 1\}$ του $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, και χρησιμοποιήστε τους για να υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2'$ και $\mathcal{B}_1'$.

Λύση: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x, \\ L(x) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x, \\ L(x^2) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x. \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της L ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο

$$[L]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ένα παράδειγμα

Για τους πίνακες αλλαγής βάσης, παρατηρούμε ότι

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2, \quad x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2, \quad x^2 + x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

και

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x, \quad x - 1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x.$$

Άρα οι πίνακες αλλαγής βάσης είναι οι

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από το τελευταίο, εύκολα βλέπουμε ότι

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2'} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, τελικά έχουμε ότι

$$[L]_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_1'} = [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'} \cdot [L]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$