Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Πρόταση

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, $f : V \to W$ μονομορφισμός. Έστω $U \leq V$ και $f(U) = \{w \in W : w = f(u) \text{ για κάποιο } u \in U\}$. Τότε

1. Ο $f(U)$ είναι υπόχωρος του W.
2. Το $\{u_1, \ldots, u_k\}$ είναι βάση του U αν και μόνο αν το$\{f(u_1), \ldots, f(u_k)\}$ είναι βάση του $f(U)$.

Απόδειξη:

1. Άσκηση...
2. Αν περιορίσουμε την f στο χώρο U παίρνουμε την απεικόνιση $\tilde{f} : U \to f(U)$, με $\tilde{f}(u) = f(u)$.
   - Η $\tilde{f}$ είναι ισομορφισμός.
   - $\dim U = \dim f(U)$.
   - Αν το $\{u_1, \ldots, u_k\}$ είναι βάση του U, αρκεί να δείξω ότι το $\{f(u_1), \ldots, f(u_k)\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο.
   - Αν το $\{f(u_1), \ldots, f(u_k)\}$ είναι βάση του $f(U)$, αρκεί να δείξω ότι το $\{u_1, \ldots, u_k\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο.

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0 \;\Leftrightarrow\; f\left(\sum_{i=1}^{k} c_i u_i\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{k} c_i f(u_i) = 0.$$

Πόρισμα

Έστω V δ.χ. διάστασης n και $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \leq V$. Έστω $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση συντεταγμένων ως προς μία βάση $\mathcal{B}$ του V. Αν το σύνολο $\{\iota_{\mathcal{B}}(v_{i_1}), \ldots, \iota_{\mathcal{B}}(v_{i_k})\}$ είναι βάση του χώρου $\langle \iota_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, \iota_{\mathcal{B}}(v_m) \rangle$, τότε το σύνολο $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ είναι βάση του U.

Απόδειξη:

- Ο $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός,
- $\langle \iota_{\mathcal{B}}(v_1), \ldots, \iota_{\mathcal{B}}(v_m) \rangle = \iota_{\mathcal{B}}(U)$.
- Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα.

Παράδειγμα:

Βρείτε μία βάση του χώρου $U = \langle 1 + x - x^2, 1 + x + x^2, 1 + x - 3x^2 \rangle \leq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

- Θεωρούμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.
- $\iota_{\mathcal{B}}(U) = \langle (1, 1, -1), (1, 1, 1), (1, 1, -3) \rangle \leq \mathbb{R}^3$.
- Υπολογίζουμε μία βάση του $\iota_{\mathcal{B}}(U)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Το $\{(1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$ είναι βάση του $\iota_{\mathcal{B}}(U)$, άρα το $\{1 + x - x^2, 1 + x + x^2\}$ είναι βάση του U.

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

- V δ.χ. με βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
- W δ.χ. με βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$
- $L : V \to W$ γραμμική απεικόνιση

Τότε υπάρχουν μοναδικοί $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ για $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ τέτοιοι ώστε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} w_i, \quad \text{για} \;\; 1 \leq j \leq n.$$

Ο πίνακας $(a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ονομάζεται πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Συμβολίζουμε $[L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

Παράδειγμα:

- $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $L(x, y, z) = (2x - y, x + y + z)$.
- Βάσεις: $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}, \mathcal{C} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

Θα υπολογίζουμε τον πίνακα $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:

- Υπολογίζουμε

$$\begin{array}{ccccc} L(1,0,1) & = & (2,2) & = & 2 \cdot (1,1) + 0 \cdot (-1,1) \\ L(0,1,1) & = & (-1,2) & = & \frac{1}{2} \cdot (1,1) + \frac{3}{2} \cdot (-1,1) \\ L(1,1,1) & = & (1,3) & = & 2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (-1,1) \end{array}$$

- Άρα

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα:

- $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ με $L(a,b,c) = (a+b) + (a-b+c)x + (b+2c)x^2$.
- Βάσεις: $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$, $C = \{1+x, 1+x+x^2, x+x^2\}$.

Θα υπολογίζουμε τον πίνακα $[L]_{\mathcal{B}}^{C}$:

- Υπολογίζουμε

$$\begin{array}{lllll} L(1,0,1) & = & 1+2x+2x^2 & = & 0\cdot(1+x)+1\cdot(1+x+x^2)+1\cdot(x+x^2) \\ L(0,1,1) & = & 1+x^2 & = & (-1)\cdot(1+x)+2\cdot(1+x+x^2)+(-1)\cdot(x+x^2) \\ L(1,1,1) & = & 2+x+3x^2 & = & (-2)\cdot(1+x)+4\cdot(1+x+x^2)+(-1)\cdot(x+x^2) \end{array}$$

- Άρα

$$[L]_{\mathcal{B}}^{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:

- V δ.χ. με βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- W δ.χ. με βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$
- $L : V \to W$ γραμμική απεικόνιση με $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A = (a_{i,j})$.
- Οπότε $L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i$, για $1 \leq j \leq n$
- Θυμίζουμε τους ισομορφισμούς:

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{B}} : V &\quad \to \quad \mathbb{R}^n \\ x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n &\quad \mapsto \quad (x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{C}} : W &\quad \to \quad \mathbb{R}^m \\ y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m &\quad \mapsto \quad (y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

Τότε για $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$ και $\iota_{\mathcal{B}}(v) = x = (x_1, \ldots, x_n)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
L(v) &= L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j L(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) w_i = w
\end{aligned}
$$

Όμως $\iota_{\mathcal{C}}(w) = Ax$. Οπότε $\iota_{\mathcal{C}}(L(v)) = Ax$. Δηλαδή $\iota_{\mathcal{C}}(L(\iota_{\mathcal{B}}^{-1}(x))) = Ax$.

Ισοδύναμα $\iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} = \tilde{L} \Leftrightarrow L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \tilde{L} \circ \iota_{\mathcal{B}}$, όπου

$$
\begin{aligned}
\tilde{L} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\
x &\mapsto Ax
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα:

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ με πίνακα ως προς τις βάσεις $\mathcal{B} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ και $C = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$

$$[L]_{\mathcal{B}}^{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε το $L(2 + x - x^2)$.

- $L(2 + x - x^2) = \iota_C^{-1}\left(\tilde{L}(\iota_{\mathcal{B}}(2 + x - x^2))\right)$.
- $2 + x - x^2 = 2(1 + x) - (x + x^2)$, άρα $\iota_{\mathcal{B}}(2 + x - x^2) = (2, -1, 0)$.
- $\tilde{L}(2, -1, 0) = [L]_{\mathcal{B}}^{C} \cdot (2, -1, 0)^T = (2, -3, -1)^T$.
- $\iota_C^{-1}(2, -3, -1) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (1 + x) + (-1) \cdot (1 + x + x^2) = -2 - 4x - x^2$.
- Άρα $L(2 + x - x^2) = -2 - 4x - x^2$.

Πρόταση

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι διαστάσεων n, m αντίστοιχα και $L : V \to W$ γραμμική απεικόνιση με πίνακα $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ως προς βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Τότε

$$\dim\ker(L) = \dim\mathcal{N}(A) \quad \text{και} \quad \dim\operatorname{im}(L) = \dim\mathcal{R}(A).$$

Απόδειξη:

Θεωρήστε την απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ και τον περιορισμό της στον υπόχωρο $\ker(L)$.

$$\hat{\iota}_{\mathcal{B}} : \ker(L) \to \mathbb{R}^n, \ \ \hat{\iota}_{\mathcal{B}}(v) = \iota_{\mathcal{B}}(v)$$

- Τότε $\ker(L) \cong \operatorname{im}(\hat{\iota}_{\mathcal{B}})$, οπότε $\dim\ker(L) = \dim\operatorname{im}(\hat{\iota}_{\mathcal{B}})$.
- Θα δείξω ότι $\operatorname{im}(\hat{\iota}_{\mathcal{B}}) = \ker(\tilde{L})$.
- Θυμάμαι ότι $\iota_{\mathcal{C}} \circ L = \tilde{L} \circ \iota_{\mathcal{B}}$.

Θυμάμαι ότι $\iota_{\mathcal{C}} \circ L = \tilde{L} \circ \iota_{\mathcal{B}}$.

- Έστω $w \in \mathrm{im}(\hat{\iota}_{\mathcal{B}})$.
  - $w = \iota_{\mathcal{B}}(v)$, για κάποιο $v \in \ker(L)$
  - $\tilde{L}(\iota_{\mathcal{B}}(v)) = \iota_{\mathcal{C}}(L(v)) = \iota_{\mathcal{C}}(0) = 0$
  - Άρα $w = \iota_{\mathcal{B}}(v) \in \ker(\tilde{L})$.
- Έστω $w \in \ker(\tilde{L})$.
  - Πάρε $v \in V$ τέτοιο ώστε $w = \iota_{\mathcal{B}}(v)$
  - $\iota_{\mathcal{C}}(L(v)) = \tilde{L} \circ \iota_{\mathcal{B}}(v) = \tilde{L}(w) = 0$
  - Άρα $L(v) = 0$, οπότε $v \in \ker(L)$
  - $w \in \mathrm{im}(\hat{\iota}_{\mathcal{B}})$.

Θεώρημα

Έστω διανυσματικοί χώροι V, W. Για $L, M \in \mathcal{L}(V, W)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

1. $L + M : V \to W$, $(L + M)(v) = L(v) + M(v)$ για $v \in V$,
2. $\lambda \cdot L : V \to W$, $(\lambda \cdot L)(v) = \lambda \cdot L(v)$ για $v \in V$.

Με τις πράξεις αυτές, το σύνολο $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη:

- Δείξτε ότι οι απεικονίσεις $L + M$ και $\lambda \cdot L$ είναι γραμμικές.
  Δηλαδή δείξτε ότι για κάθε $u, v \in V$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,
  - $(L + M)(av + u) = a \cdot (L + M)(v) + (L + M)(u)$,
  - $(\lambda \cdot L)(av + u) = a \cdot (\lambda \cdot L)(v) + (\lambda \cdot L)(u)$.
- Δείξτε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι διάστασης n, m αντίστοιχα και βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ αντίστοιχα. Τότε η απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{L}(V,W) & \to & \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ L & \mapsto & [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \end{array}$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Απόδειξη:

Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Έστω $L, M \in \mathcal{L}(V,W)$, με $[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_{i,j})$ και $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (b_{i,j})$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (\lambda L + M)(v_j) &= \lambda L(v_j) + M(v_j) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{i,j} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{i,j} + b_{i,j}) w_i. \end{aligned}$$

Οπότε $[\lambda L + M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \lambda [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} + [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Δηλαδή $\Phi(\lambda L + M) = \lambda \Phi(L) + \Phi(M)$.

- Η Φ είναι 1-1:

$$L \in \ker(\Phi) \;\Leftrightarrow\; [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = 0 \;\Leftrightarrow\; L(v_j) = 0 \text{ για } 1 \leq j \leq n \;\Leftrightarrow L = 0.$$

Οπότε $\ker(\Phi) = \{0\}$.

- Η Φ είναι επί:

$$\text{Αν } \; A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), \;\; \text{ορίζουμε } \; L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i, \;\; \text{για } 1 \leq j \leq n.$$

Οπότε $\Phi(L) = [L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_{i,j})$.

Πόρισμα

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι, με διαστάση n και m αντίστοιχα. Τότε $\dim \mathcal{L}(V, W) = nm$.

Ορισμός

Έστω V διανυσματικός χώρος. Ο χώρος $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ ονομάζεται *δυϊκός* χώρος του V και συμβολίζεται V^*. Έαν $\dim V = n$, τότε $\dim V^* = n$. Τα στοιχεία του V^*, τα οποία είναι γραμμικές απεικονίσεις $f : V \to \mathbb{R}$, ονομάζονται *γραμμμικά συναρτησοειδή* ή *γραμμικές μορφές*.

Θεώρημα

Έστω V χώρος διάστασης n και $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση του. Για $1 \leq i \leq n$ ορίζουμε τις γραμμικές μορφές $v_i^* \in V^*,\ 1 \leq i \leq n$, με

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \ i = j \\ 0 & , \text{αν } \ i \neq j \end{cases}$$

Το σύνολο $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ είναι βάση του V^*. Ονομάζεται *δυϊκή* βάση της $\mathcal{B}$.

Απόδειξη:

Άσκηση...