

Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ορισμοί

Για ευκολία θα συμβολίζουμε πλέον με $\mathcal{L}(V, W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο V στον διανυσματικό χώρο W . Έστω $L \in \mathcal{L}(V, W)$, τότε:

- Αν η L είναι 1-1, τότε λέμε ότι L *μονομορφισμός*.
- Αν η L είναι επί, τότε λέμε ότι L *επιμορφισμός*.
- Αν η L είναι 1-1 και επί, τότε λέμε ότι L *ισομορφισμός*.

Μάλιστα, αν υπάρχει ισομορφισμός $L \in \mathcal{L}(V, W)$, τότε λέμε ότι οι διανυσματικοί χώροι V και W είναι *ισόμορφοι* και γράφουμε $V \cong W$.

Για να ελέγχουμε κατά πόσο μια γραμμική απεικόνιση $L \in \mathcal{L}(V, W)$ κατέχει μια ή περισσότερες από τις παραπάνω επιπλέον ιδιότητες, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις συνήθεις τεχνικές που εφαρμόζονται για αντίστοιχα προβλήματα σε συναρτήσεις. Όμως η γραμμικότητα της L μας δίνει και επιπλέον ιδιότητες που μπορούν να μας διευκολύνουν.

Χαρακτηρισμός των μονομορφισμών

Πρόταση

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Η L είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει $G \in \mathcal{L}(W, V)$ τέτοια ώστε $G \circ L = I_V$.

Απόδειξη:

⇒ Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του V . Ισχυριζόμαστε ότι $L(v_1), \dots, L(v_n)$ γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν όχι, τότε υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε

$$a_1 L(v_1) + \dots + a_n L(v_n) = 0 \xrightarrow{L \text{ γραμμική}} L(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = L(0) \xrightarrow{L \text{ 1-1}} a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0,$$

άτοπο, γιατί $v_1, \dots, v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα. Επεκτείνουμε το σύνολο $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ σε βάση του W και θεωρούμε ως G την γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $L(v_i) \mapsto v_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και απεικονίζει τα υπόλοιπα στοιχεία της βάσης σε κάποια στοιχεία του V . Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε ότι $(G \circ L)(v_i) = G(L(v_i)) = v_i = I_V(v_i)$, δηλαδή $G \circ L = I_V$.

⇐ Αντίστροφα, έστω ότι $G \circ L = I_V$ και $u, v \in V$ με $L(u) = L(v)$. Τότε έχουμε ότι

$$L(u) = L(v) \Rightarrow G(L(u)) = G(L(v)) \xrightarrow{G \circ L = I_V} u = v,$$

άρα L 1-1.

Χαρακτηρισμός των επιμορφισμών

Πρόταση

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Η L είναι επίμορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει $G \in \mathcal{L}(W, V)$ τέτοια ώστε $L \circ G = I_W$.

Απόδειξη:

⇒ Έστω $\{w_1, \dots, w_m\}$ μια βάση του W . Επειδή L επί, υπάρχουν $v_1, \dots, v_m \in V$, τέτοια ώστε $L(v_i) = w_i$, για $i = 1, \dots, m$. Μάλιστα επειδή $w_1, \dots, w_m$ γραμμικά ανεξάρτητα (ως βάση), επειδή L γραμμική, παίρνουμε ότι $v_1, \dots, v_m$ γραμμικά ανεξάρτητα. Παίρνουμε ως G την γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει $w_i \mapsto v_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$, έχουμε ότι

$$(L \circ G)(w_i) = L(G(w_i)) = L(v_i) = w_i = I_W(w_i),$$

δηλαδή $L \circ G = I_W$.

⇐ Αντίστροφα, έστω ότι $L \circ G = I_W$ και $w \in W$. Θέτουμε $u = G(w)$ και παίρνουμε ότι

$$u = G(w) \Rightarrow L(u) = L(G(w)) \stackrel{L \circ G = I_W}{\Rightarrow} L(u) = w.$$

Άρα L επί.

Χαρακτηρισμός των ισομορφισμών

Πόρισμα

Έστω $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Η L είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει $G \in \mathcal{L}(W, V)$, τέτοια ώστε $L \circ G = I_W$ και $G \circ L = I_V$.

Απόδειξη: Το ζητούμενο έπεται άμεσα ως συνδυασμός των δύο προηγούμενων αποτελεσμάτων.

Λήμμα

Αν $L \in \mathcal{L}(V, W)$ και $G : W \rightarrow V$ (όχι απαραίτητα γραμμική), τέτοιες ώστε $L \circ G = I_W$ και $G \circ L = I_V$, τότε G γραμμική.

Απόδειξη: Εύκολα βλέπουμε ότι επειδή $G \circ L = I_V$, έχουμε ότι L 1-1. Έστω $u, v \in W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$(L \circ G)(\lambda u + v) \stackrel{L \circ G = I_W}{=} \lambda u + v$$

και

$$L(\lambda G(u) + G(v)) \stackrel{L \text{ γραμμική}}{=} \lambda L(G(u)) + L(G(v)) \stackrel{L \circ G = I_W}{=} \lambda u + v.$$

Άρα παίρνουμε ότι

$$L(G(\lambda u + v)) = L(\lambda G(u) + G(v)) \stackrel{L \text{ 1-1}}{\Rightarrow} G(\lambda u + v) = \lambda G(u) + G(v),$$

δηλαδή G γραμμική.

Χαρακτηρισμός των ισομορφισμών

Ορισμός

Αν $L \in \mathcal{L}(V, W)$, $G \in \mathcal{L}(W, V)$, τέτοιες ώστε $L \circ G = I_W$ και $G \circ L = I_V$, τότε λέμε ότι L αντιστρέψιμη και G η αντίστροφη της L . Μάλιστα συμβολίζουμε $G = L^{-1}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $(L^{-1})^{-1} = L$.

- Με λόγια μπορούμε να θυμόμαστε τον μνημονικό κανόνα ότι “*μια γραμμική απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι ισομορφισμός*”.
- Είδαμε την έννοια της αντιστρεψιμότητας και ορίσαμε τις αντίστροφες **γραμμικών** απεικονίσεων. Γενικότερα μια απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ είναι *αντιστρέψιμη*, αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί. Η μελέτη των απεικονίσεων αυτών ανάμεσα σε γενικότερα σύνολα (οχι απαραίτητα με την δομή διανυσματικών χώρων) μελετάται στο μάθημα *Θεμέλια των Μαθηματικών*.

Χαρακτηρισμός μέσα από τον πυρήνα και την εικόνα

Πρόταση

Έστω $L \in \mathcal{L}(V, W)$, όπου V, W διανυσματικοί χώροι. Τότε

1. L μονομορφισμός αν και μόνο αν $\ker L = \{0\}$.
2. L επιμορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{Im} L = W$.

Απόδειξη:

1. $\Rightarrow$ Έστω L μονομορφισμός. Επειδή $L(0) = 0$, παίρνουμε ότι $0 \in \ker L$ και επειδή L 1-1, δεν υπάρχει άλλο στοιχείο $v \in V \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $L(v) = 0$.
 $\Leftarrow$ Έστω L τέτοια ώστε $\ker L = \{0\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $L(u) = L(v)$, τότε $u = v$. Έστω $L(u) = L(v)$, τότε

$$L(u) = L(v) \Rightarrow L(u) - L(v) = 0 \xrightarrow{L \text{ γραμμική}} L(u - v) = 0 \Rightarrow u - v \in \ker L \xrightarrow{\ker L = \{0\}} u - v = 0 \Rightarrow u = v.$$

2. Άμεσο.

Μερικά σημαντικά πορίσματα

Πόρισμα

Η απεικόνιση $L \in \mathcal{L}(V, W)$ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\dim \ker L = 0$ και είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\dim \operatorname{Im} L = \dim W$.

Απόδειξη: Άμεσο από τα προηγούμενα.

Πόρισμα

Αν U, V διανυσματικοί χώροι, τέτοιοι ώστε $U \cong V$, τότε $\dim U = \dim V$.

Απόδειξη: Αφού $U \cong V$ υπάρχει ισομορφισμός $L \in \mathcal{L}(U, V)$. Τότε $\dim \ker L = 0$ και $\dim \operatorname{Im} L = \dim V$. Ακόμα έχουμε ότι

$$\dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = \dim U \stackrel{\dim \ker L = 0}{\Rightarrow} \dim \operatorname{Im} L = \dim U.$$

Καταλήγουμε ότι $\dim U = \dim V$.

Παρατήρηση

Αργότερα θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, αν οι χώροι έχουν πεπερασμένη διάσταση!

Μερικά παραδείγματα

1. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$ είναι γραμμική, αλλά δεν είναι ούτε μονομορφισμός, ούτε επιμορφισμός.
2. Η απεικόνιση $d : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mapsto a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ είναι επιμορφισμός, αλλά όχι μονομορφισμός.
3. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 6}, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mapsto a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6$ είναι μονομορφισμός, αλλά όχι επιμορφισμός.
4. Δεν υπάρχει ισομορφισμός $\text{Mat}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Η ισομορφία διανυσματικών χώρων είναι μεταβατική

Πρόταση

Αν U, V, W διανυσματικοί χώροι τέτοιοι ώστε $U \cong V$ και $V \cong W$, τότε $U \cong W$.

Απόδειξη:

- Έστω $f : U \rightarrow V$ και $g : V \rightarrow W$ ισομορφισμοί. Αρκεί να δείξουμε ότι $g \circ f : U \rightarrow W$ ισομορφισμός.
- Επειδή f, g γραμμικές, έχουμε δει ότι $g \circ f$ γραμμική, άρα αρκεί να δείξουμε ότι είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.
- Έστω $u \in \ker g \circ f$. Τότε

$$(g \circ f)(u) = 0 \Rightarrow g(f(u)) = 0 \xrightarrow{\ker g = \{0\}} f(u) = 0 \xrightarrow{\ker f = \{0\}} u = 0.$$

Άρα $\ker g \circ f = \{0\}$, δηλαδή $g \circ f$ μονομορφισμός.

- Ακόμα $\dim \operatorname{Im} g \circ f = \dim U - \dim \ker g \circ f = \dim U$. Όμως επειδή $U \cong V$ και $V \cong W$, παίρνουμε $\dim U = \dim V = \dim W$, δηλαδή $\dim \operatorname{Im} g \circ f = \dim W$. Το τελευταίο σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\operatorname{Im} g \circ f$ υπόχωρος του W , μας δίνει ότι $\operatorname{Im} g \circ f = W$ και άρα $g \circ f$ επιμορφισμός.

Η ισομορφία διανυσματικών χώρων είναι ανακλαστική και συμμετρική

Λήμμα

Για κάθε διανυσματικούς χώρους V, W , έχουμε ότι

1. $V \cong V$,
2. Αν $V \cong W$, τότε $W \cong V$.

Απόδειξη:

1. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι, κατά προφανή τρόπο, η απεικόνιση I_V είναι ισομορφισμός για κάθε διανυσματικό χώρο V .
2. Έστω $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ισομορφισμός. Τότε υπάρχει η αντίστροφη της f η οποία είναι γραμμική, δηλαδή $f^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$. Μάλιστα f^{-1} αντιστρέψιμη, δηλαδή f^{-1} ισομορφισμός. Έπεται ότι $W \cong V$.

Παρατήρηση

Γενικά στην Άλγεβρα, χρησιμοποιούμε τον όρο *ισόμορφα* για κάποια αντικείμενα, προκειμένου να δείξουμε ότι τα αντικείμενα αυτά είναι, από άποψη αλγεβρικών ιδιοτήτων, ταυτόσημα ή ισοδύναμα. Και αυτό γιατί οι ισομορφισμοί είναι αντιστοιχίες που διατηρούν (σέβονται) την αλγεβρική δομή των αντικειμένων αυτών.

Το διάνυσμα συντεταγμένων

Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$. Σταθεροποιούμε μια βάση

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

του V . Τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή υπάρχουν μοναδικά $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Το διάνυσμα $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *διάνυσμα συντεταγμένων* του v ως προς την βάση $\mathcal{B}$.

- Δεδομένης της βάσης $\mathcal{B}$ και του διανύσματος $v \in V$, το διάνυσμα συντεταγμένων ενός διανύσματος είναι μονοσήμαντα ορισμένο.
- Δεδομένης της βάσης $\mathcal{B}$, διαφορετικά διανύσματα συντεταγμένων αντιστοιχούν σε διαφορετικά διανύσματα του V .
- Το διάνυσμα συντεταγμένων του $v \in V$ ως προς μια άλλη βάση $\mathcal{B}'$ του V , ενδέχεται να είναι διαφορετικό.
- Μέσω αυτής της αντιστοιχίας, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον διανυσματικό χώρο V (δηλαδή τον τυχαίο χώρο διάστασης n) με τον $\mathbb{R}^n$.

Μερικά παραδείγματα

- Ας παρουμε το διάνυσμα $u = (2, 5, -3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε $u = 2e_1 + 5e_2 - 3e_3$, όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων του u ως προς την κανονική βάση είναι ο εαυτός του. Έστω (a, b, c) το διάνυσμα συντεταγμένων του u ως προς την βάση $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Τότε

$$u = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2, \\ a + c = 5, \\ b + c = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \\ b = -3, \\ c = 0. \end{cases}$$

Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων του u ως προς την βάση $\mathcal{B}'$ είναι το $(5, -3, 0)$.

- Το διάνυσμα συντεταγμένων του πολυωνύμου $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ ως προς την βάση $\mathbb{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ είναι το $(2, 0, -3, 1)$.

Ένας ισομορφισμός

Λήμμα

Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n και $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ μια βάση του. Τότε η απεικόνιση

$$i_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

που απεικονίζει κάθε διάνυσμα του V στο διάνυσμα συντεταγμένων του, είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Βλέπουμε ότι η $i_{\mathcal{B}}$ είναι η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n, u_i \mapsto e_i$ για κάθε i , καθώς

$$i_{\mathcal{B}}(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = (a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = a_1 f(u_1) + \dots + a_n f(u_n).$$

Με άλλα λόγια παίρνουμε ότι $i_{\mathcal{B}}$ γραμμική.

Ακόμα, εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι η απεικόνιση

$$j_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \rightarrow V, (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

είναι η αντίστροφη της $i_{\mathcal{B}}$. Άρα $i_{\mathcal{B}}$ αντιστρέψιμη, οπότε $i_{\mathcal{B}}$ ισομορφισμός.

Εφαρμογή: εύρεση βάσης πεπερασμένα παραγόμενου χώρου

Η απεικόνιση που είδαμε στην προηγούμενη διαφάνεια μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εύκολα μια βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου χώρου, που δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ για κάποιο n . Θα χρειαστούμε το επόμενο.

Λήμμα

Έστω $f \in \mathcal{L}(U, V)$ μονομορφισμός διανυσματικών χώρων. Το σύνολο $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $\{u_1, \dots, u_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη: Το ευθύ ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση. Για το αντίστροφο έχουμε

$$\sum_{i=1}^n a_i f(u_i) = 0 \xRightarrow{f \text{ γραμμική}} f\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) = f(0) \xRightarrow{f^{1-1}} \sum_{i=1}^n a_i u_i = 0 \xRightarrow{u_1, \dots, u_n \text{ ανεξ.}} a_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Παράδειγμα

Βρείτε μια βάση και την διάσταση του χώρου $V = \langle 1 + x, 1 + 2x + x^2, x + x^2 \rangle$.

Απάντηση: Ο V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Αν $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, τότε ο V απεικονίζεται στον $i_{\mathcal{B}}(V) = \langle (1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1) \rangle$. Μπορούμε να δούμε ότι $\langle (1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1) \rangle = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$ (π.χ. παίρνοντας των χώρο γραμμών του αντίστοιχου πίνακα). Καταλήγουμε ότι $\dim V = 2$ και $V = \langle 1 + x, x + x^2 \rangle$.

Ένας πλήρης χαρακτηρισμός

Πόρισμα

Αν V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n , τότε $V \cong \mathbb{R}^n$.

Πόρισμα

Αν V, W διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης τότε $V \cong W$ αν και μόνο αν $\dim V = \dim W$.

Απόδειξη:

⇒ Το ευθύ το έχουμε ήδη δείξει.

⇐ Έστω $\dim V = \dim W = n$. Τότε, από το προηγούμενο, έχουμε ότι $V \cong \mathbb{R}^n$ και $W \cong \mathbb{R}^n$. Άρα από την μεταβατικότητα της ισομορφίας, παίρνουμε ότι $V \cong W$.