Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ορισμός και το βασικό κριτήριο

Ορισμός

Έστω δυο διανυσματικοί χώροι V και W. Μια απεικόνιση $L : V \to W$ λέγεται *γραμμική* αν για κάθε $x, y \in V$ και $c \in \mathbb{R}$,

1. $L(x + y) = L(x) + L(y)$ και
2. $L(cx) = cL(x)$.

Κριτήριο

Έστω δυο διανυσματικοί χώροι V και W. Μια απεικόνιση $L : V \to W$ είναι γραμμική αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in V$ και $c \in \mathbb{R}$, $L(cx + y) = cL(x) + L(y)$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω L γραμμική. Τότε για κάθε $x, y \in V$ και $c \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$L(cx + y) = L(cx) + L(y) = cL(x) + L(y).$$

($\Leftarrow$) Καταρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in V$, έχουμε ότι $L(x) = L(1 \cdot x + 0) = 1 \cdot L(x) + L(0) = L(x) + L(0)$, δηλαδή παίρνουμε ότι $L(0) = 0$. Τώρα, έχουμε ότι, για κάθε $x, y \in V$ και $c \in \mathbb{R}$, $L(x + y) = L(1 \cdot x + y) = 1 \cdot L(x) + L(y) = L(x) + L(y)$ και $L(cx) = L(cx + 0) = cL(x) + L(0) = cL(x)$. Άρα L γραμμική.

Παραδείγματα

- Η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (z + y, x - 3y)$ είναι γραμμική, γιατί αν $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ και $c \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= L((cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2)) \\ &= (cz_1 + z_2 + cy_1 + y_2, cx_1 + x_2 - 3(cy_1 + y_2)) \\ &= c(z_1 + y_1, x_1 - 3y_1) + (z_2 + y_2, x_2 - 3y_2) \\ &= cL((x_1, y_1, z_1)) + L((x_2, y_2, z_2)). \end{aligned}$$

- Συμβολίζουμε με $C^1(\mathbb{R})$ τον χώρο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και με $C^0(\mathbb{R})$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$, τότε παρατηρούμε ότι για κάθε $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ και $c \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$D(cf + g) = (cf + g)' = cf' + g' = cD(f) + D(g),$$

  άρα η D είναι γραμμική.

- Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ δεν είναι γραμμική, καθώς

$$f((2, 2)) = 4,\ f((1, 1)) + f((1, 1)) = 1 + 1 = 2 \text{ και } (2, 2) = (1, 1) + (1, 1).$$

Παραδείγματα

- Η ολοκλήρωση $I : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$, είναι γραμμική, καθώς για κάθε $f, g \in C^0([0,1])$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$I(af+g) = \int_0^1 (af+g) = a\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = aI(f) + I(g).$$

- Αν $\mathbb{R}[x]$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων, τότε η απεικόνιση $L_{bx^m} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f(x) \mapsto bx^m f(x)$, όπου $b \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}$, είναι γραμμική, αφού για κάθε $f, g \in \mathbb{R}[x]$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$L_{bx^m}(af+g) = (bx^m)(af(x)+g(x)) = abx^m f(x) + bx^m g(x) = aL_{bx^m}(f) + L_{bx^m}(g).$$

- Αν $\mathbb{R}[x]_{<n}$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού $< n$, τότε η απεικόνιση $E_k : \mathbb{R}[x]_{<n} \to \mathbb{R}, f(x) \mapsto f(k)$, όπου $k \in \mathbb{R}$, είναι γραμμική, καθως κάθε $f, g \in \mathbb{R}[x]_{<n}$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$E_k(af+g) = (af+g)(k) = af(k) + g(k) = aE_k(f) + E_k(g).$$

Γραμμικοί συνδυασμοί

Πρόταση

Έστω $L : V \to W$ γραμμική απεικόνιση, όπου V και W διανυσματικοί χώροι. Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in V$ και $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$L(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) = c_1 L(x_1) + \cdots + c_n L(x_n).$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

- Η πρόταση είναι άμεση (από τον ορισμό) για $n = 1$.
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$ (επαγωγική υπόθεση).
- Για $n = k + 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_{k+1} x_{k+1}) &\overset{L \text{ γραμμική}}{=} c_1 L(x_1) + L(c_2 x_2 + \cdots + c_{k+1} x_{k+1}) \\ &\overset{\text{Ε.Υ.}}{=} c_1 L(x_1) + c_2 L(x_2) + \cdots + c_{k+1} L(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

Πρόταση

Εάν $L : V \to W$ και $M : W \to U$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση $M \circ L : V \to U$ είναι γραμμική απεικόνιση.

Απόδειξη: Έστω $u, v \in V$ και $c \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(M \circ L)(cu + v) &= M(L(cu + v)) \\
&= M(cL(u) + L(v)) \\
&= cM(L(u)) + M(L(v)) \\
&= c(M \circ L)(u) + (M \circ L)(v).
\end{aligned}$$

Μερικές βασικές ιδιότητες

Πριν δούμε παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα) γραμμικών απεικονίσεων, ας δούμε μερικές από τις βασικές τους ιδιότητες.

Λήμμα

Έστω διανυσματικοί χώροι V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.

1. $L(0) = 0$.
2. Εάν τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $L(v_1), \dots, L(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
3. Εάν τα $L(v_1), \dots, L(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Το Ερώτημα (3) προκύπτει από το (2). Ακόμα:

1. Εάν $u \in V$, τότε $0 = 0u$, άρα $L(0) = L(0 \cdot u) = 0 \cdot L(u) = 0$.
2. Επειδή $v_1, \dots, v_n$ γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν $c_1, \dots, c_n$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0$. Τότε

   $$0 = L(0) = L(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1 L(v_1) + \cdots + c_n L(v_n),$$

   άρα $L(v_1), \dots, L(v_n)$ γραμμικά εξαρτημένα.

Παραδείγματα και παρατηρήσεις

- Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$, με $b \neq 0$ δεν είναι γραμμική. Πράγματι, για $b \neq 0$, έχουμε ότι $f(0) = b \neq 0$.
- Αντίθετα, η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ είναι γραμμική, καθώς για κάθε $c, x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(cx + y) = a(cx + y) = c(ax) + (ay) = cf(x) + f(y).$$

Παρατήρηση

- Αν $L : V \to W$ γραμμική και $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ δεν είναι απαραίτητα γραμμικά ανεξάρτητα.
- Ομοίως, εάν τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $v_1, \ldots, v_n$ δεν είναι απαραίτητα γραμμικά εξαρτημένα.

Μερικές ειδικές γραμμικές απεικονίσεις

- Η απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to W$, τέτοια ώστε $\mathbf{0}(v) = 0$ για κάθε $v \in V$, είναι γραμμική και ονομάζεται *μηδενική απεικόνιση*.
- Η απεικόνιση $\mathbf{I}_V : V \to V$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα στον εαυτό του, δηλαδή $\mathbf{I}_V(v) = v$ για κάθε $v \in V$, είναι γραμμική και λέγεται *ταυτοτική απεικόνιση*.
- Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση $T_a : V \to V$, η οποία πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα με τον αριθμό a, δηλαδή $T_a(v) = av$ για κάθε $v \in V$, είναι γραμμική. Μάλιστα η μηδενική και η ταυτοτική είναι ειδικές περιπτωσεις της για $a = 0$ και 1 αντίστοιχα.

Πίνακες ως γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ως L_A ορίζουμε την απεικόνιση

$$L_A \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ x \mapsto Ax.$$

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$L_A(cx + y) = A(cx + y) = cAx + Ay = cL_A(x) + L_A(y),$$

δηλαδή η L_A είναι γραμμική.

Δείξαμε ότι κάθε πίνακας $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε έναν πίνακα $m \times n$.

Παρατήρηση

Η απεικόνιση $Ax + b$, όπου $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ δεν είναι γραμμική, καθώς δεν απεικονίζει το $0 \in \mathbb{R}^m$ στο $0 \in \mathbb{R}^n$.

Γραμμικές απεικονίσεις ως πίνακες

Πρόταση

Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε έναν πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $L(x) = Ax$.

Απόδειξη:

- Θεωρούμε την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, \ldots, e_n\}$, όπου $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Έτσι αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- Για $i = 1, \ldots, n$ θέτουμε $a_i = L(e_i)$ και παίρνουμε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}).$$
- Τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε:
$$L(x) = L(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 L(e_1) + \cdots + x_n L(e_n) = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = Ax.$$

Παράδειγμα

Έχουμε δει ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (z + y, x - 3y)$ είναι γραμμική. Ας βρούμε τον πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ τέτοιον ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$,

$$L(x) = Ax.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$L(e_1) = L(1,0,0) = (0,1),\ L(e_2) = L(0,1,0) = (1,-3),\ L(e_3) = L(0,0,1) = (1,0),$$

Επομένως, σύμφωνα με την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης έχουμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός πυρήνα και εικόνας

Ορισμός

Έστω V και W διανυσματικοί χώροι και $L : V \to W$ μια γραμμική απεικόνιση.

1. Το σύνολο $\{y \in W \mid y = L(x) \text{ για κάποιο } x \in V\} \subseteq W$ ονομάζεται *εικόνα* της L και συμβολίζεται με $\operatorname{Im} L$.
2. Το σύνολο $\{x \in V \mid L(x) = 0\} \subseteq V$ ονομάζεται *πυρήνας* της L, και συμβολίζεται με $\ker L$.

- Σε γλώσσα που είμαστε ήδη εξοικειωμένοι, μπορούμε να πούμε ότι η εικόνα είναι το σύνολο τιμών της L και ο πυρήνας η προεικόνα του 0, δηλαδή το σύνολο $L^{-1}(0)$.
- Ο λόγος που εισαγάγουμε νέα ορολογία είναι ότι ο πυρήνας και η εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης δεν είναι απλά σύνολα, αλλά υπόχωροι των χώρων W και V αντίστοιχα.

Ο πυρήνας και η εικόνα ως διανυσματικοί χώροι

Πρόταση

Ο πυρήνας $\ker L$ μιας γραμμικής απεικόνισης $L : V \to W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Η εικόνα $\operatorname{Im} L$ της L είναι διανυσματικός υπόχωρος του W και $\dim \operatorname{Im} L \leq \dim V$.

Απόδειξη:

- Εάν $x_1, x_2 \ker L$, και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda x_1 + x_2 \in \ker L$ αφού $L(\lambda x_1 + x_2) = \lambda L(x_1) + L(x_2) = 0 \in W$. Συμπεραίνουμε ότι $\ker L$ υπόχωρος του V.
- Έστω $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} L$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in V$ τέτοια ώστε $L(x_1) = y_1$ και $L(x_2) = y_2$. Από την γραμμικότητα της L έχουμε ότι $L(\lambda x_1 + x_2) = \lambda L(x_1) + L(x_2) = \lambda y_1 + y_2$. Άρα $\lambda y_1 + y_2 \in \operatorname{Im} L$. Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Im} L$ υπόχωρος του W.
- Αν $\dim V = 0$ ή ∞, τότε η πρόταση σχετικά με την διάσταση του $\operatorname{Im} L$ είναι άμεση. Έστω λοιπόν ότι $0 < \dim V < \infty$. Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, \ldots, y_n\}$ στο $\operatorname{Im} L$, και διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στο V τέτοια ώστε $L(x_i) = y_i$, για $i = 1, \ldots, n$. Τότε τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως αναγκαστικά $n \leq \dim V$. Αυτό ισχύει για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, άρα ο χώρος $\operatorname{Im} L$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim \operatorname{Im} L \leq \dim V$.

Ορισμός

Η διάσταση $\dim \operatorname{Im} L$ της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης L ονομάζεται *τάξη* της L.

Μερικά παραδείγματα

- Αν $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, τότε ο πυρήνας της L_A είναι προφανώς ο μηδενόχωρος του A και η εικόνα της L_A είναι ο χώρος στηλών. Με άλλα λόγια
$$\ker L_A = \mathcal{N}(A),\ \operatorname{Im} L_A = \mathcal{R}(A).$$
Εδώ επίσης παρατηρούμε ότι η τάξη της L_A ταυτίζεται με εκείνη του πίνακα.
- Αν $\mathbf{0} : V \to W$ είναι η μηδενική απεικόνιση, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\ker \mathbf{0} = V$ και $\operatorname{Im} \mathbf{0} = \{0\}$.
- Αν $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}), f \mapsto f'$, τότε $f \in \ker D \iff D(f) = 0 \iff f$ σταθερή. Ακόμα, για κάθε $g \in C^0(\mathbb{R})$, έχουμε ότι $f = \int_0^x g(t)dt \in C^1(\mathbb{R})$ και $D(f) = g$. Άρα έχουμε ότι
$\ker D = \{f(x) = c \mid c \in \mathbb{R}\}$ και $\operatorname{Im} D = C^0(\mathbb{R})$.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα

Θεώρημα

Εάν $L : V \to W$, είναι γραμμική απεικόνιση και $\dim V < \infty$, τότε ισχύει ότι

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L.$$

Απόδειξη:

- Ο πυρήνας $\ker L$ είναι υπόχωρος του V. Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μια βάση του.
- Η εικόνα $\operatorname{Im} L$ είναι υπόχωρος του W. Έστω $\{w_1, \ldots, w_m\}$ μια βάση της. Επειδή για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $w_i \in \operatorname{Im} L$, έχουμε ότι υπάρχουν $u_i \in V$ τέτοια ώστε $L(u_i) = w_i$. Μάλιστα, επειδή τα $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ως βάση), το ίδιο θα ισχύει και για τα $\{u_1, \ldots, u_m\}$.
- Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

  $$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m\}$$

  είναι βάση του V. Για αυτόν τον λόγο, θα πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ παράγει τον V και ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα

- Έστω $u \in V$. Τότε $L(u) \in \operatorname{Im} L$, και επειδή $\{w_1, \dots, w_m\}$ βάση της $\operatorname{Im} L$, τότε υπάρχουν $c_1, \dots, c_m$ τέτοια ώστε
$$L(u) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m = c_1 L(u_1) + \cdots + c_m L(u_m) = L(c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m).$$
Επειδή η L είναι γραμμική, το τελευταίο δίνει
$$L\left(u - (c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m)\right) = 0 \Rightarrow u - (c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m) \in \ker L.$$
Επομένως, επειδή $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση του $\ker L$, υπάρχουν $d_1, \dots, d_n$ τέτοια ώστε
$$u - (c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m) = d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n \Rightarrow u = d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n + c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m.$$
Δείξαμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$ παράγει τον V.
- Συνεχίζουμε με την γραμμική ανεξαρτησία του $\mathcal{B}$. Έστω
$$\begin{aligned} d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n + c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = 0 &\Rightarrow c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = -(d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n) \\ &\Rightarrow L(c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m) = -L(d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n) \\ &\Rightarrow c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m = 0. \end{aligned}$$
Από την γραμμική ανεξαρτησία των $w_1, \dots, w_m$ παίρνουμε ότι $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση παίρνουμε $d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n = 0$ και από την γραμμική ανεξαρτησία των $v_1, \dots, v_n$ παίρνουμε $d_1 = \ldots = d_n = 0$.

Η γραμμική απεικόνιση χαρακτηρίζεται από την εικόνα της βάσης

Πρόταση

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι και $\mathcal{B}$ μια βάση του V. Τότε υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στις γραμμικές απεικονίσεις $L : V \to W$ και στις απεικονίσεις $f : \mathcal{B} \to W$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την εξής αντιστοιχία:

$$\{f : \mathcal{B} \to W\} \longrightarrow \{L : V \to W \mid L \text{ γραμμικη}\},\ f \mapsto L_f,\ L_f\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} c_b b\right) = \sum_{b\in\mathcal{B}} c_b f(b).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η αντιστοιχία μας είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

- Για να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη πρέπει να δείξουμε ότι αν $f : \mathcal{B} \to W$, η L_f είναι πράγματι γραμμική απεικόνιση $V \to W$. Έστω $u, v \in V$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε, επειδή $\mathcal{B}$ βάση του V, έχουμε ότι $u = \sum_{b\in\mathcal{B}} u_b b$ και $v = \sum_{b\in\mathcal{B}} v_b b$. Έτσι

$$\begin{aligned} L_f(cu+v) &= L_f\left(c\sum_{b\in\mathcal{B}} u_b b + \sum_{b\in\mathcal{B}} v_b b\right) = L_f\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} (cu_b + v_b) b\right) = \sum_{b\in\mathcal{B}} (cu_b + v_b) f(b) \\ &= c\sum_{b\in\mathcal{B}} u_b f(b) + \sum_{b\in\mathcal{B}} v_b f(b) = cL_f(u) + L_f(v). \end{aligned}$$

  Άρα L_f γραμμική και η αντιστοιχία μας είναι καλά ορισμένη.

- Το ότι η αντιστοιχία μας είναι 1-1 είναι σχετικά άμεσο, καθώς αν f, g δυο διαφορετικές απεικονίσεις $\mathcal{B} \to W$, τότε υπάρχει κάποιο $b \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $f(b) \neq g(b)$. Τότε έχουμε ότι

$$L_f(b) = f(b) \neq g(b) = L_g(b),$$

δηλαδή $L_f \neq L_g$.

- Για να δείξουμε ότι η αντιστοιχία μας είναι επί, θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $V \to W$ προκύπτει από κάποια απεικόνιση $\mathcal{B} \to W$. Πράγματι, έστω $L : V \to W$ γραμμική. Θεωρώ την απεικόνιση

$$f_L : \mathcal{B} \to W, \ b \mapsto L(b).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι μέσω της αντιστοιχίας μας η f_L απεικονίζεται στην L.

Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα

Βρείτε την γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ που ορίζει η απεικόνιση $f(x^i) = x^i + 1$, για $i = 0, 1, 2, 3$.

Απάντηση: Καταρχάς παρατηρούμε ότι η f ορίζεται στην βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$ του χώρου $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Έτσι, αν L_f η γραμμική απεικόνιση που ψάχνουμε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L_f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) &= a_0 f(1) + a_1 f(x) + a_2 f(x^2) + a_3 f(x^3) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $g \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, τότε

$$L_f(g) = g(1) + g(x).$$