Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Μια βασική πρόταση

Λήμμα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n. Τότε κάθε υποσύνολό του μεγέθους $m > n$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη:

- Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα πεπερασμένα παραγόμενο χώρο, κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο έχει το πολύ τόσα διανύσματα όσα έχει ένα παράγον σύνολο.
- Το λήμμα προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος και κάθε παράγον του σύνολο (δηλαδή οι βάσεις του) έχουν μέγεθος n.

Μια βασική πρόταση

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και X ένας υπόχωρός του. Τότε $\dim X \leq \dim V$. Μάλιστα $\dim X = \dim V$ αν και μόνο αν $X = V$.

Απόδειξη:

- Το θεώρημα ύπαρξης βάσης εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας βάσης του X. Έστω $\mathcal{B}_X$ μια τέτοια βάση.
- Το $\mathcal{B}_X$ αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του X (άρα και του V).
- Καταλήγουμε ότι $\dim X = |\mathcal{B}_X| \leq \dim V$.

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος, παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι άμεσος. Για τον ευθύ, έχουμε:

- Το θεώρημα ύπαρξης βάσης εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας βάσης του X. Έστω $\mathcal{B}_X$ μια τέτοια βάση.
- Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{B}_X$ αποτελείται από $\dim V = \dim X = |\mathcal{B}_X|$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V.
- Άρα είναι μια βάση του V.
- Καταλήγουμε ότι $X = \langle \mathcal{B}_X \rangle = V$.

Διάσταση αθροίσματος

Πρόταση

Έστω X και Y πεπερασμένης διάστασης υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Απόδειξη:

- Έστω $\mathcal{B}_{X\cap Y} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ μια βάση του χώρου $X \cap Y$.
- Επειδή $X \cap Y \subseteq X$, έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}_{X\cap Y}$ αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του X. Άρα μπορεί να επεκταθεί σε βάση του X. Έστω $\mathcal{B}_X = \{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell\}$ μια τέτοια βάση.
- Ομοίως επεκτείνουμε το $\mathcal{B}_{X\cap Y}$ σε μια βάση $\mathcal{B}_Y = \{z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m\}$ του Y.
- Θα δείξουμε ότι το σύνολο

  $$\mathcal{B}_{X+Y} = \{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m\}$$

  είναι βάση του $X+Y$.
- Για να το κάνουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{B}_{X+Y}$ *παράγει τον χώρο* $X+Y$ και ότι το $\mathcal{B}_{X+Y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Διάσταση αθροίσματος

Παραγωγή χώρου:

- Έστω $u \in X + Y$. Τότε υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $u = x + y$.
- Επειδή $x \in X$ και $\mathcal{B}_X$ βάση του X, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x = a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_\ell x_\ell$.
- Ομοίως υπάρχουν $b_1, \ldots, b_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y = b_1 z_1 + \cdots + b_n z_n + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$.
- Παίρνουμε ότι

  $$u = x + y = (a_1 + b_1) z_1 + \cdots + (a_n + b_n) z_n + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_\ell x_\ell + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,$$

  δηλαδή το u γράφηκε ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\mathcal{B}_{X+Y}$.
- Δείξαμε ότι το $\mathcal{B}_{X+Y}$ παράγει τον $X + Y$.

Διάσταση αθροίσματος

Γραμμική ανεξαρτησία:

- Θεωρούμε έναν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $\mathcal{B}_{X+Y}$ που να ισούται με 0.

$$a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b_1 x_1 + \cdots + b_\ell x_\ell + c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m = 0.$$

  Αρκεί να δείξουμε ότι ο **μοναδικός** τρόπος να γίνει αυτό είναι ο τετριμμένος.

- Θέτω $u = a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b_1 x_1 + \cdots + b_\ell x_\ell \in X$. Ευκολα βλέπουμε ότι $u = -c_1 y_1 - \cdots - c_m y_m \in Y$, που σημαίνει ότι $u \in X \cap Y$.

- Επειδή $u \in X \cap Y$, παίρνουμε ότι γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης του $\mathcal{B}_{X \cap Y}$. Άρα υπάρχουν $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $u = d_1 z_1 + \cdots + d_n z_n$.

- Παίρνουμε ότι $0 = u - u = d_1 z_1 + \cdots + d_n z_n + c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$. Όμως τα $z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ως βάση του Y), επομένως όλα τα $d_1 = \ldots = d_n = c_1 = \ldots = c_m = 0$.

- Ακόμα παρατηρούμε ότι το παραπάνω μας δίνει ότι $u = 0$, άρα $a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b_1 x_1 + \cdots + b_\ell x_\ell = 0$, το οποίο μας δίνει (ομοίως με πριν) ότι $a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_\ell = 0$.

- Δείξαμε ότι $a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_\ell = c_1 = \ldots = c_m = 0$ που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Διάσταση ευθέως αθροίσματος

Από το τελευταίο παίρνουμε άμεσα το παρακάτω.

Πόρισμα

Αν A, B υπόχωροι ενός δ.χ. V πεπερασμένης διάστασης. Αν $A \cap B = \{0\}$, τότε $A + B = A \oplus B$ και

$$\dim(A + B) = \dim(A \oplus B) = \dim A + \dim B.$$

Αντίστροφα, αν $\dim(A + B) = \dim A + \dim B$, τότε $A \cap B = \{0\}$ και το άθροισμα είναι ευθύ.

Ύπαρξη και ορισμός

Πρόταση – Ορισμός

Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και X υπόχωρός του. Τότε υπάρχει ένας υπόχωρος Y του V, τέτοιος ώστε

$$V = X \oplus Y.$$

Λέμε ότι ο Y είναι ο *συμπληρωματικός* υπόχωρος του X στον V.

Απόδειξη:

- Έστω ότι $\dim V = n \geq m = \dim X$.
- Παίρνουμε μια βάση $\mathcal{B}_X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ του X και την επεκτείνουμε σε μια βάση $\mathcal{B}_V = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_{n-m}\}$ του V.
- Θέτουμε $Y = \langle y_1, \ldots, y_{n-m} \rangle$.
- Εύκολα βλέπουμε ότι $X + Y = V$.
- Ακόμα, έχουμε ότι $\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X + Y) = m + (n - m) - n = 0$. Άρα $X \cap Y = \{0\}$ και το άθροισμα είναι ευθύ. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Παρατήρηση: Ο συμπληρωματικός ενός υπόχωρου δεν είναι εν γένει μοναδικός.

Οι συμπληρωματικοί των θεμελιωδών χώρων ενός πίνακα

Πρόταση

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Τότε $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$.

Απόδειξη: Καταρχάς παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{0\}$, καθώς σε αυτήν την περίπτωση θα πάρουμε ότι $\dim(\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T)) = n - r + r = n = \dim \mathbb{R}^n$ και άρα παίρνουμε την πρώτη σχέση. Η δεύτερη σχέση προκύπτει αν εφαρμόσουμε την πρώτη στον πίνακα A^T. Επομένως επικεντρωνόμαστε στην απόδειξη ότι $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{0\}$.

- Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T)$.
- Επειδή $x \in \mathcal{R}(A^T)$ έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $(x_1 \ \cdots \ x_n) = (c_1 \ \cdots \ c_m)A$.
- Από το τελευταίο παίρνουμε

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 \ \cdots \ x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (c_1 \ \cdots \ c_m)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c^T A x.$$

- Όμως $x \in \mathcal{N}(A)$, άρα $Ax = 0$. Τώρα το τελευταίο μας δίνει $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0$.
- Καταλήγουμε ότι $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{0\}$.