Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ορισμοί

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ο πίνακας A ορίζει τέσσερις υπόχωρους που θα μας απασχολήσουν:

- Ο *χώρος στηλών* του A είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του A (αν τις δούμε σαν διανύσματα). Οπότε έχουμε $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.
- Ο *μηδενόχωρος* του A είναι ο χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Έχουμε δει ότι πρόκειται για διανυσματικό υπόχωρο, δηλαδή $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Ο *χώρος γραμμών* του A είναι ο χώρος που παράγεται από τις γραμμές του A. Είναι ξεκάθαρο ότι παράγεται από τις στήλες του A^T, δηλαδή ταυτίζεται με τον χώρο στηλών του A^T. Έτσι έχουμε $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Ο *αριστερός μηδενόχωρος* του A είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος $y^T \cdot A = 0$. Είναι ξεκάθαρο ότι ένα $y \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στον χώρο αυτό αν και μόνο αν $A^T y = 0$, δηλαδή αν ανήκει στον μηδενόχωρο του A^T. Επομένως μπορούμε τον χώρο αυτόν να τον συμβολίσουμε με $\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Οι χώροι αυτοί είναι οι *θεμελιώδεις υπόχωροι του A*. Θα βρούμε τις διαστάσεις τους και θα περιγράψουμε μια βάση τους. Παρατηρήστε ότι αυτό το έχουμε ήδη δει για την περίπτωση του $\mathcal{N}(A)$.

Ο χώρος γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο χώρος γραμμών ενός κλιμακωτού πίνακα U έχει ως βάση τις μη μηδενικές γραμμές του. Αυτό γιατί καταρχάς εξορισμού παράγεται από αυτές και κατά δεύτερον τα διανύσματα αυτά από κατασκευής είναι γραμμικά ανεξάρτητα (όπως έχουμε δει). Επιπλέον ισχύει το παρακάτω.

Λήμμα

Εάν U είναι ο αντίστοιχος κλιμακωτός του πίνακα A, τότε $\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)$.

Απόδειξη:

- Είναι ξεκάθαρο από την διαδικασία της απαλοιφής Gauss, ότι κάθε γραμμή του U προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός γραμμών του A. Με άλλα λόγια οι γραμμές του U ανήκουν στον χώρο γραμμών του A, δηλαδή $\mathcal{R}(U^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)$.
- Ομοίως, επειδή όλες οι πράξεις γραμμών που μας οδηγούν από τον A στον U είναι αντιστρέψιμες, μπορούμε να δούμε ότι και οι γραμμές του A μπορούν να προκύψουν ως γραμμικοί συνδυασμοί γραμμών του U, παίρνουμε ότι $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(U^T)$.
- Καταλήγουμε ότι $\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)$.

Ο χώρος γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$

Πρόταση

Αν $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ τάξης r, τότε $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim \mathcal{R}(A^T) = r$ και μια βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ είναι οι μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή U και $\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)$.

Απόδειξη: Ο μόνος ισχυρισμός που δεν έχουμε ήδη δει είναι εκείνος σχετικά με την διάσταση του χώρου $\mathcal{R}(A)$. Προκύπτει όμως άμεσα από το γεγονός ότι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του U είναι ίσο με το πλήθος των οδηγών του, δηλαδή ίσο με την τάξη του A.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η αντίστοιχη κλιμακωτή του μορφή είναι

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως $\dim \mathcal{R}(A^T) = 2$ και μια βάση του είναι η $\mathcal{B} = \{(1,2,0,1),(0,1,1,0)\}$.

Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$

Σχετικά με τον μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$, έχουμε ήδη δείξει ότι καταρχάς πρόκειται πράγματι για υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον έχουμε δείξει την παρακάτω πρόταση, την οποία επαναλαμβάνουμε για λόγους πληρότητας.

Πρόταση

Αν r είναι η τάξη του A, τότε $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$.

Επιπλέον του παραπάνω, έχουμε δει σε προηγούμενες διαλέξεις, πώς μπορούμε να βρίσκουμε μια βάση του μηδενόχωρου ενός πίνακα A.

Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$

- Εδώ θα πρέπει καταρχάς να παρατηρήσουμε ότι ένας τρόπος εύρεσης του χώρου στηλών του A είναι βρίσκοντας τον χώρο γραμμών του ανάστροφου A^T.
- Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να επαναλάβουμε την απαλοιφή Gauss στον ανάστροφο πίνακα A^T, καθώς η κλιμακωτή κορφή του ανάστροφου (έστω $\bar{U}$) δεν ταυτίζεται με τον ανάστροφο της κλιμακωτής μορφής του αρχικού μας πίνακα (έστω U^T).
- Με άλλα λόγια $\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{R}(U)$.
- Όμως είναι εύκολο να δούμε ότι $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(U) = r$.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να βρούμε μια βάση του $\mathcal{R}(A)$ χρησιμοποιώντας μόνο την απαλοιφή Gauss στον A.

Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$

Λήμμα

Ένα σύνολο στηλών του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνο αν το αντίστοιχο σύνολο στηλών του αντίστοιχου κλιμακωτού είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη:

- Αν U είναι ο αντίστοιχος κλιμακωτός του A, τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης P και αντιστρέψιμος (κάτω τριγωνικός) L, τέτοιοι ώστε $PA = LU$.
- Έστω A' ένας πίνακας που έχει ως στήλες του κάποιες από τις στήλες του A και U' ο πίνακας που αποτελείται από τις αντίστοιχες στήλες του U, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$PA' = LU' \Rightarrow A' = (P^{-1}L)U'.$$

- Οι στήλες του A' είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν το σύστημα $A'x = 0$ έχει κάποια μη μηδενική λύση.
- Επειδή ο πίνακας $P^{-1}L$ είναι αντιστρέψιμος, ένα x είναι λύση του $A'x = 0$ αν και μόνο αν $U'x = 0$.
- Ομοίως οι στήλες του U' είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν το σύστημα $U'x = 0$ έχει μη μηδενική λύση.
- Το ζητούμενο έπεται.

Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$

Από το προηγούμενο Λήμμα, παίρνουμε το παρακάτω.

Πρόταση

Αν $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ τάξης r, τότε $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\dim \mathcal{R}(A) = r$ και μια βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από εκείνες τις στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του αντίστοιχου κλιμακωτού που έχουν οδηγούς.

Πόρισμα

$\dim \mathcal{R}(A^T) = \dim \mathcal{R}(A) = r$.

Για παράδειγμα, είδαμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ο αντίστοιχος κλιμακωτός είναι ο

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως $\dim \mathcal{R}(A) = 2$ και, εφόσον οι οδηγοί βρίσκονται στην 1η και την 2η στήλη του U, τότε μια βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από την 1η και την 2η στήλη του. Με άλλα λόγια είναι $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (2,1,2)\}$.

Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$

- Εδώ θα πρέπει καταρχάς να παρατηρήσουμε ότι ένας τρόπος εύρεσης του χώρου αυτού είναι εργαζόμενοι πάνω στον A^T.
- Από το παραπάνω παίρνουμε απευθείας ότι $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να βρούμε μια βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ χρησιμοποιώντας μόνο την απαλοιφή Gauss στον A.

Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ τάξης r. Τότε υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P, ένας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός L και ένας πίνακας σε κλιμακωτή μορφή U, τέτοιοι ώστε

$$PA = LU \Rightarrow (L^{-1}P)A = U.$$

Μάλιστα οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του U είναι μηδενικές. Στα παραπάνω κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Επειδή ο πίνακας $L^{-1}P$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε ότι οι γραμμές του (και άρα οποιοδήποτε σύνολο γραμμών του) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
2. Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του $L^{-1}P$, πολλαπλασιαζόμενες από αριστερά με τον A δίνουν 0.
3. Επομένως οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του $L^{-1}P$ αποτελούν ένα σύνολο $m - r = \dim \mathcal{N}(A^T)$ γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του $\mathcal{N}(A^T)$, επομένως αποτελούν βάση του.

Συνολικά έχουμε το εξής:

Πρόταση

Αν $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ πίνακας τάξης r, τότε $\mathcal{N}(A^T)$ διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ και $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$, ενώ μια βάση του αποτελείται από τις τελευταίες $m - r$ γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ όπως προκύπτει από την απαλοιφή Gauss .

Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$

Αν πάρουμε για παράδειγμα τον πίνακα των προηγούμενων παραδειγμάτων, έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

- Παίρνουμε ότι $PA = LU$, όπου $P = I_3$ και $L = E_{3,1}(-1)^{-1} = E_{3,1}(1)$.
- Άρα $L^{-1}P = E_{3,1}(-1)$.
- Ακόμα, ο $A \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{R})$ έχει τάξη $r = 2$, άρα ο $\mathcal{N}(A^T)$ έχει διάσταση $3 - 2 = 1$ και μια βάση του θα είναι η τελευταία γραμμή του $E_{3,1}(-1)$.
- Καταλήγουμε ότι $\mathcal{N}(A^T) = \langle(-1, 0, 1)\rangle$.