Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Θεώρημα

Έστω διανυσματικός χώρος V και $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V.
2. Κάθε διάνυσμα $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γρ. συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.
3. Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ είναι γρ. εξαρτημένο.
4. Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει τον V, αλλά για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ δεν τον παράγει.

Απόδειξη:

Συμβολίζουμε $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Θα δείξουμε ότι (1) => (2) => (3) => (4) => (1)

(1) Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V. =>

(2) Κάθε διάνυσμα $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γρ. συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.

- Αφού το S παράγει τον V κάθε $w \in V$ γράφεται ως γρ. συνδυασμός των v_i.
- Έστω $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Τότε $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i = 0$.
- Τότε $a_i = b_i$, για $1 \leq i \leq n$ διότι το S είναι γρ. ανεξάρτητο.

(2) Κάθε διάνυσμα $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γρ. συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$. =>

(3) Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ είναι γρ. εξαρτημένο.

- Έστω η σχέση $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot v_i = 0$. Άρα $a_i = 0$ για $1 \leq i \leq n$.
- Έστω $w \in V \setminus S$. Τότε $w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ για κάποια a_i.
- Άρα το $S \cup \{w\}$ είναι γρ. εξαρτημένο.

(3)Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ είναι γρ. εξαρτημένο. =>

(4)Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει τον V, αλλά για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ δεν τον παράγει.

- Έστω $w \in V$. Αν $w \in S$ τότε $w \in \langle S \rangle$.
- Αν $w \notin S$, το σύνολο $S \cup \{w\}$ είναι γρ. εξαρτημένο, άρα $aw + \sum_{i=1}^{n} a_i v_n = 0$.
- Πρέπει $(a, a_1, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Ειδικότερα, $a \neq 0$.
- Άρα $w \in \langle S \rangle$. Δηλαδή $\langle S \rangle = V$.
- Ας υποθέσω ότι το $S \setminus \{v_i\}$ παράγει τον V για κάποιο i.
- Τότε $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$. Άτοπο, διότι το S είναι γρ. ανεξάρτητο.

(4) Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει τον V, αλλά για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ δεν τον παράγει. =>

(1) Το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V.

- Το S παράγει τον V εξ' υποθέσεως.
- Έστω ότι είναι γρ. εξαρτημένο. Τότε $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$ για κάποιο $1 \leq i \leq n$.
- Τότε $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$. Άτοπο!

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ δύο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου χώρου. Τότε $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.

Απόδειξη:

- Το σύνολο $\mathcal{B}_1$ είναι γρ. ανεξάρτητο και το σύνολο $\mathcal{B}_2$ παράγει, άρα $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$.
- Όμοια $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$. Άρα $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.

Ορισμός Διάστασης

Έστω διανυσματικός χώρος V. Ορίζουμε τη *διάσταση* του V ως εξής:

$$\dim(V) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } V = \{0\} \\ n & \text{εάν υπάρχει βάση του } V \text{ με } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & \text{εάν για κάθε } m \in \mathbb{N} \text{ υπάρχει γρ. ανεξάρτητο υποσύνολο του } V \text{ με } m \text{ στοιχεία} \end{cases}$$

Παραδείγματα:

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
2. $\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq n}) = n + 1$
3. $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$ γιατί για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{1, x, \ldots, x^n\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο
4. $\dim(\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$
5. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ το χώρο των πραγματικών ακολουθιών. Τότε $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \infty$.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ένας πίνακας τάξης r. Τότε

1. $r \leq \min\{m, n\}$,
2. $\dim(\mathcal{R}(A)) = r$,
3. $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - r$

Απόδειξη:

- r είναι το πλήθος των οδηγών. Κάθε γραμμή και κάθε στήλη έχει το πολύ ένα οδηγό.
- Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{R}(A)$ παράγεται από τις στήλες του A αντιστοιχούν σε στήλες του κλιμακωτού που έχουν οδηγό οι οποίες είναι γρ. ανεξάρτητες.
- Μετά την απαλοιφή Gauss έχουμε $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{N}(A)$ παράγεται από $n - r$ διανύσματα που είναι γρ. ανεξάρτητα.

Πόρισμα

Ένας διανύσματικός χώρος είναι πεπερασμένα παραγόμενος αν και μόνο αν έχει πεπερασμένη διάσταση.

Πόρισμα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n. Τότε

1. Κάθε σύνολο με περισσότερα από n διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένο στο V.
2. Κανένα σύνολο με λιγότερα από n διανύσματα δεν παράγει τον V.

Θεώρημα

Έστω V διανυσματιός χώρος διάστασης n και S ένα υποσύνολο του V με n στοιχεία. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
2. Το S παράγει τον V.
3. Το S είναι βάση του V.

Απόδειξη:

(1) => (2) Έστω ότι το S δεν παράγει τον V.

- Πάρε $w \in V \setminus \langle S \rangle$.
- Τότε το $S \cup \{w\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- Άτοπο, δίοτι $|S \cup \{w\}| = n + 1 > \dim(V)$.

(2) => (3) Έστω ότι το S δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

- Τότε υπάρχει $v \in S$ τέτοιο ώστε $\langle S \setminus \{v\} \rangle = \langle S \rangle = V$.
- Άτοπο, διότι $|S \setminus \{v\}| = n - 1 < \dim(V)$.
- Άρα το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και παράγει τον V, άρα είναι βάση.

(3) => (1) Ισχύει από τον ορισμό της βάσης.

Παραδείγματα:

1. Το σύνολο $\{(1,0,0),(1,-1,0),(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, άρα είναι βάση του.
2. Το σύνολο $\{1, 1+2x, 2-x+3x^2, x+x^3\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και $\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 3}) = 4$, άρα είναι βάση του.

Θεώρημα

Έστω V ένας χώρος διάστασης n και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση του. Έστω $\{w_1, \ldots, w_m\}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Τότε υπάρχουν $n - m$ διανύσματα $v_{i_{m+1}}, \ldots, v_{i_n}$ τέτοια ώστε το $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_{m+1}}, \ldots, v_{i_n}\}$ είναι βάση του V.

Απόδειξη:

- Το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει τον V.
- Από το Θ. Αντικατάστασης, υπάρχουν $v_{i_{m+1}}, \ldots, v_{i_n}$, τέτοια ώστε το $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_{m+1}}, \ldots, v_{i_n}\}$ παράγει τον V.
- Έχει $n = \dim(V)$ διανύσματα, άρα είναι βάση.