Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Λήμμα

Έαν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k \in V$ είναι γρ. εξαρτημένα, τότε υπάρχει κάποιο $1 \leq i \leq k$ τ.ω.

1. $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k$ για κάποια $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k$, $j \neq i$
2. $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$.

Απόδειξη: Το δείξαμε στο προηγούμενο μάθημα.

Λήμμα Αντικατάστασης

Έστω χώρος V και $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Αν $w \in \langle S \rangle$ τότε $w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ για κάποια $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Αν $\lambda_i \neq 0$ τότε $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{v_i\} \cup \{w\} \rangle$.

Απόδειξη:

- $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, άρα $w = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$.
- Έστω $a_i \neq 0$.
- Τότε $v_i = \frac{1}{a_i} w - \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_i} v_j$.
- Άρα $\langle w, v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle w, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Θεώρημα Αντικατάστασης

Εάν το σύνολο $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το χώρο V και το σύνολο $T = \{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε $m \leq n$ και υπάρχουν $v_{i_{m+1}}, \ldots, v_{i_n} \in S$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_{m+1}}, \ldots, v_{i_n}\}$ παράγει τον V.

Απόδειξη:

Αν $m = 0$ και $T = \emptyset$, η πρόταση είναι τετριμμένα αληθής. Έστω $m \geq 1$, οπότε $n \geq 1$

- $w_1 \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, άρα $w_1 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, για κάποια $a_i \in \mathbb{R}$ *όχι όλα ίσα με 0.*
- Αρα υπάρχει i_1 τέτοιο ώστε $\langle S \rangle = \langle S \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{w_1\} \rangle$.
- Αν $m = 1$ τελείωσα! Αν $m > 1$ συνεχίζω...
- $w_2 \in \langle S \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{w_1\} \rangle$, άρα $w_2 = b_1 w_1 + \sum_{i \neq i_1} a_i v_i$
- $a_{i_2} \neq 0$ για κάποιο $i_2 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1\}$.
- Τότε $V = \langle S \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{w_1\} \rangle = \langle S \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \cup \{w_1, w_2\} \rangle$.

Απόδειξη (συνέχεια):

- Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Στο βήμα k έχουμε $V = \langle S \setminus \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \{w_1, \ldots, w_k\} \rangle$.
- $w_{k+1} \in \langle S \setminus \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \{w_1, \ldots, w_k\} \rangle$, άρα $w_{k+1} = b_1 w_1 + \cdots + b_k w_k + \sum_{i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} a_i v_i$
- $a_{i_{k+1}} \neq 0$ για κάποιο $i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$.
- Οπότε $V = \langle S \setminus \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}\} \cup \{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}\} \rangle$
- Εάν $n < m$, τότε θα καταλήξω με το σύνολο $\{w_1, \ldots, w_n\}$ που παράγει το χώρο V. Τότε όμως $w_m \in \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$, άτοπο!
- Άρα $m \leq n$ και καταλήγω με το σύνολο $S \setminus \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}\} \cup \{w_1, \ldots, w_m\}$ που παράγει τον V.

Πόρισμα

Σε ένα πεπερασμένα παραγόμενο χώρο, κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο έχει το πολύ τόσα διανύσματα όσα έχει ένα παράγον σύνολο.

Παραδείγματα:

1. Το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι γρ. εξαρτημένο.
2. Γενικότερα, $m > n$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ είναι γρ. εξαρτημένα.
3. Σε ένα πεπερασμένα παραγόμενο χώρο V *κάθε* γρ. ανεξάρητο σύνολο μπορεί να επεκταθεί σε παράγον σύνολο.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το σύνολο $\{(1,1,0),(0,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι γρ. ανεξάρτητο και να συμπληρωθεί σε ένα παράγον σύνολο.

Για να εξετάσω εάν το σύνολο είναι γρ. ανεξάρτητο, εξετάζω εάν το παρακάτω σύστημα έχει μη μηδενική λύση

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση (δείξτε το!)

Για να το συμπληρώσω σε παράγον σύνολο ακολουθώ τα βήματα της απόδειξης:

1. Ένα παράγον σύνολο είναι το $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
2. $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$. Μπορώ να αντικαταστήσω ένα από τα $(1,0,0)$ ή $(0,1,0)$ με το $(1,1,0)$.
3. Άρα $\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,0),(1,0,0),(0,0,1) \rangle$.
4. $(0,1,1) = (1,1,0) - (1,0,0) + (0,0,1)$. Μπορώ να αντικαταστήσω ένα από τα $(1,0,0)$ ή $(0,0,1)$ με το $(0,1,1)$.
5. $\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,0),(0,1,1),(1,0,0) \rangle$.

Ορισμός [Βάση]

Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ ενός χώρου V ονομάζεται *βάση* του V εάν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και τον παράγει.

Παραδείγματα:

1. Το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Ονομάζεται η *κανονική βάση*.
2. Το σύνολο $\{1, x, \ldots, x^n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.
3. Στο σύνολο $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, ας συμβολίσουμε με $A_{i,j}$ τον πίνακα ο οποίος έχει 1 στη θέση i, j και 0 παντού αλλού. Τότε το σύνολο $A_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ είναι βάση του $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
4. Το σύνολο $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ *δεν είναι* βάση του $\langle(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\rangle$, διότι δεν είναι γρ. ανεξάρτητο.
5. Το σύνολο $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *δεν είναι* βάση του $\mathbb{R}^3$ διότι δεν τον παράγει.

Θεώρημα [Υπαρξη βάσης]

Κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση.

Απόδειξη:

Θα το αποδείξουμε μόνο για *πεπερασμένα παραγόμενους χώρους*. Ισχύει για κάθε χώρο.

- Αν $V = \{0\}$, τότε η βάση είναι το $\emptyset$.
- Έστω $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ένα παράγον σύνολο, με $v_i \neq 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.
- Όλα τα υποσύνολα του S είναι πεπερασμένα το πλήθος.
- Ξεχωρίζουμε τα υποσύνολα που είναι γρ. ανεξάρτητα. Υπάρχει τουλάχιστον ένα!
- Από αυτά πάρε ένα (οποιοδήποτε) με μέγιστο πλήθος στοιχείων.
- Ισχυρισμός: αυτό το υποσύνολο είναι βάση.

Απόδειξη του Ισχυρισμού:

- Έστω $T = \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq S$ ένα γρ. ανεξάρτητο υποσύνολο με μέγιστο πλήθος στοιχείων.
- Έστω $v \in S \setminus T$. Τότε $T \cup \{v\}$ είναι γρ. εξαρτημένο.
- Άρα $av + a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$. Πρέπει $a \neq 0$, άρα $v \in \langle T \rangle$.
- $S \subseteq \langle T \rangle \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$, άρα $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.
- Το σύνολο T είναι γρ. ανεξάρτητο και παράγει το χώρο, άρα είναι βάση!

Παράδειγμα: Βρείτε μία βάση του χώρου $\mathcal{N}(A)$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Λύνουμε το σύστημα $Ax = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Με ανάδρομη αντικατάσταση βρίσκουμε $\mathcal{N}(A) = \{z(1,1,1) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$.

Μία βάση του $\mathcal{N}(A)$ είναι η $\{(1,1,1)\}$.

Παράδειγμα: Βρείτε μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα A.

Καταλήγουμε στον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Οδηγό έχουν οι στήλες 1 και 2. Άρα οι στήλες 1 και 2 *του αρχικού πίνακα* είναι βάση του $\mathcal{R}(A)$.

Άρα μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ είναι η $\{(1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$

Παράδειγμα: Συμπληρώστε το σύνολο $\{1+3x, 2+x^2\}$ σε βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Το σύνολο $\{1+3x, 2+x^2\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο (δείξτε το!)

Μία βάση του $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ είναι η $\{1, x, x^2\}$. Θα εφαρμόσω το Θ. Αντικατάστασης.

$1+3x = 1+3\cdot x$, άρα μπορώ να αντικαταστήσω το 1 από το $1+3x$.

Άρα το σύνολο $\{1+3x, x, x^2\}$ παράγει τον $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

$2+x^2 = 2\cdot(1+3x) - 6\cdot x + x^2$, άρα μπορώ να αντικαταστήσω το x από το $2+x^2$.

Άρα το σύνολο $\{1+3x, 2+x^2, x^2\}$ παράγει τον $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Είναι γρ. ανεξάρτητο:

$$\begin{aligned} a\cdot(1+3x) + b\cdot(2+x^2) + c\cdot x^2 &= 0 \Rightarrow \\ (a+2b)\cdot 1 + 3a\cdot x + (b+c)\cdot x^2 &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+2b &=& 0 \\ 3a &=& 0 \\ b+c &=& 0 \end{array} \right\}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε μοναδική λύση την $(a,b,c) = (0,0,0)$.