Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ορισμός [Γραμμική ανεξαρτησία]

Έστω διανυσματικός χώρος V. Το σύνολο $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ ονομάζεται *γραμμικώς εξαρτημένο*, εάν υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, όχι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$$

Το σύνολο S ονομάζεται *γραμμικώς ανεξάρτητο* εάν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
Εξ ορισμού, το κενό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παρατηρήσεις:

1. Έαν $0 \in S$, τότε το S είναι γρ. εξαρτημένο.
   Πραγματικά, παρε συντελεστή 1 για το 0 και συντελεστή 0 για κάθε άλλο διάνυσμα του S.
2. Έαν $S \subseteq T$ και S γρ. εξαρτημένο, τότε και το T είναι γρ. εξαρτημένο.
   Πάρε μία σχέση γρ. εξάρτησης του S. Βάλε συντελεστή 0 σε κάθε διάνυσμα του $T \setminus S$.
3. Αν το $S \subseteq T$ και το T είναι γρ. ανεξάρτητο, τότε και το S είναι γρ. ανεξάρτητο.
   Αν το S ήταν γρ. εξαρτημένο, τότε και το T θα ήταν γρ. εξαρτημένο.

Πρόταση

Έστω διανυσματικός χώρος V. Το σύνολο $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνο αν για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Ορισμός [Γραμμική ανεξαρτησία]

Έστω διανυσματικός χώρος V και $S \subseteq V$. Το σύνολο S ονομάζεται *γραμμικώς ανεξάρτητο* αν *κάθε* πεπερασμένο υποσύνολο του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
Το S ονομάζεται *γραμμικώς εξαρτημένο* αν δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

1. Έαν $0 \in S$, τότε το S είναι γρ. εξαρτημένο.
2. Έαν $S \subseteq T$ και S γρ. εξαρτημένο, τότε και το T είναι γρ. εξαρτημένο.
3. Αν το $S \subseteq T$ και το T είναι γρ. ανεξάρτητο, τότε και το S είναι γρ. ανεξάρτητο.

Παραδείγματα

1. Το $\{v\}$ είναι γρ. εξαρτημένο αν και μόνο αν $v = 0$.
2. Έστω $u \neq 0$. Το $\{v, u\}$ είναι γρ. εξαρτημένο αν και μόνο αν $v = \lambda u$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Έστω $(0,0) \neq u \in \mathbb{R}^2$. Ποιό είναι το σύνολο των σημείων v τ.ω. η συλλογή $\{v, u\}$ είναι γρ. εξαρτημένη;

Παράδειγμα

Εξετάστε εάν το σύνολο $\{(1,-1,0),(0,1,1),(-1,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι γρ. ανεξάρτητο.

$$
\begin{aligned}
x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Κάνουμε απαλοιφή Gauss

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$.

Άρα το σύνολο $\{(1,-1,0),(0,1,1),(-1,2,0)\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο.

Παράδειγμα

Εξετάστε εάν το σύνολο $\{(1,-1,0),(0,1,1),(2,-1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι γρ. ανεξάρτητο.

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Κάνουμε απαλοιφή Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις του συστήματος $(x_1, x_2, x_3) = x_3(-2,-1,1)$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

Μία σχέση γραμμικής εξάρτησης

$$2(1,-1,0) + (0,1,1) - (2,-1,1) = (0,0,0)$$

Λήμμα

Έαν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k \in V$ είναι γρ. εξαρτημένα, τότε υπάρχει κάποιο $1 \leq i \leq k$ τ.ω.

1. $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_k v_k$ για κάποια $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq k, j \neq i$
2. $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$.

Απόδειξη:

Για το (1)

- $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k = 0$ και όχι όλα τα μ_j ίσα με 0
- Αν $\mu_i \neq 0$, τότε $v_i = -\frac{\mu_1}{\mu_i} v_1 - \cdots - \frac{\mu_{i-1}}{\mu_i} v_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{\mu_k}{\mu_i} v_k$

Για το (2)

- $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$ άρα $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$
- Έστω $v = \kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_i v_i + \cdots + \kappa_k v_k \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
- Τότε $v = (\kappa_1 + \kappa_i \lambda_1) v_1 + \cdots + (\kappa_{i-1} + \kappa_i \lambda_{i-1}) v_{i-1} + (\kappa_{i+1} + \kappa_i \lambda_{i+1}) v_{i+1} + \cdots + (\kappa_k + \kappa_i \lambda_k) v_k$
- Άρα $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$

Πρόταση

Το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ με μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$)

- Έστω $w = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$
- Τότε $(a_1 - b_1) v_1 + \cdots + (a_n - b_n) v_n = 0$
- Άρα $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$

($\Leftarrow$)

- Έστω $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$. Θα δείξουμε ότι $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
- Όμως, $0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0$ και η γραφή είναι μοναδική.

Πρόταση

Έστω $U \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ κλιμακωτός πίνακας, με r οδηγούς στις στήλες $U_{j_1}, \ldots, U_{j_r}$.

1. Οι μη μηδενικές γραμμές του U είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
2. Το σύνολο $\{U_{j_1}, \ldots, U_{j_r}\}$ των στηλών με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Απόδειξη:

Για το (1): “Κάτω” από κάθε οδηγό υπάρχουν μηδενικά.

Για το (2):

- $x_1 U_{j_1} + \cdots + x_r U_{j_r} = U' x$, όπου U' είναι ο πίνακας με στήλες τα U_{j_i}, $1 \leq i \leq r$.
- Το σύστημα $U'x = 0$ είναι ισοδύναμο με το $U''x = 0$, όπου ο U'' προκύπτει από τον U διαγράφοντας τις μηδενικές γραμμές.
- Ο πίνακας U'' είναι $r \times r$, άνω τριγωνικός με τους οδηγούς στη διαγώνιο.
- Άρα είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ένα πίνακας τάξης r. Ο χώρος λύσεων του συστήματος $Ax = 0$ (ονομάζεται μηδενόχωρος του A, συμβολίζεται $\mathcal{N}(A)$) παράγεται από $n - r$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι οι στήλες $j_1, \ldots, j_{n-r}$ δεν έχουν οδηγό.

- Με την απαλοιφή Gauss παίρνουμε τον πίνακα U και με την ανάδρομη αντικατάσταση βρίσκουμε τη “γενική λύση” $(x_1, \ldots, x_n)$, όπου κάθε x_j είναι γραμμικός συνδυασμός των x_{j_i}, $1 \leq i \leq n - r$. Ειδικότερα, $x_{j_i} = x_{j_i}$.
- Θέτουμε $x_{j_1} = 1$ και $x_{j_i} = 0$ για $i \neq 1$. Παίρνουμε το v_1.
- Θέτουμε $x_{j_2} = 1$ και $x_{j_i} = 0$ για $i \neq 2$. Παιρνουμε το v_2.
- Συνεχίζουμε και τελικά παίρνουμε τα v_i, $1 \leq i \leq n - r$. Όλα είναι λύσεις του $Ax = 0$.
- Το v_i έχει στη συνιστώσα j_i το 1, ενώ στη συνιστώσα $j_{i'}$ το 0 (για $i' \neq i$).
- Άρα $\langle v_1, \ldots, v_{n-r}\rangle \subseteq \mathcal{N}(A)$.
- Έστω $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{N}(A)$.
- Πες $w = c - \sum_{i=1}^{n-r} c_{j_i} v_i$. Τότε $w \in \mathcal{N}(A)$.
- Τότε $w_{j_i} = c_i - c_i = 0$.

Απόδειξη (συνέχεια)

- Όμως κάθε συνιστώσα του w είναι γρ. συνδυασμός των συνιστωσών που αντιστοιχούν σε ελεύθερες μεταβλητές.
- Άρα $w_j = 0$ για $1 \leq j \leq n$.
- Άρα $w = 0$, δηλαδή $c = \sum_{i=1}^{n-r} c_{j_i} v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{n-r} \rangle$.
- Οπότε $\mathcal{N}(A) = \langle v_1, \ldots, v_{n-r} \rangle$.
- Έστω $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i = 0$. Η j_i συνιστώσα του αριστερού μέλους είναι ίση με λ_i.
- Άρα $\lambda_i = 0$ για $1 \leq i \leq n - r$.
- Άρα το $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.