

Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ορισμός [Άθροισμα]

Έστω U, W υπόχωροι ενός δ.χ. V . Ορίζουμε το άθροισμα των U, W ως

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, \text{ για κάποια } u \in U, w \in W\}$$

Γενικότερα, αν $U_1, \dots, U_k$ υπόχωροι του V , ορίζουμε

$$U_1 + \dots + U_k = \{v \in V : v = u_1 + \dots + u_k, \text{ για κάποια } u_i \in U_i, 1 \leq i \leq k\}$$

Παραδείγματα

1. $U = \langle (1, 0, 0) \rangle$ και $W = \langle (0, 1, 0) \rangle$. Τότε

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\} = \{s(1, 0, 0) + t(0, 1, 0) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

2. $U = \{ax : a \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $W = \{bx^2 : b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Τότε

$$U + W = \{ax + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : p(0) = 0\}$$

3. Αν V δ.χ. και $v_1, \dots, v_k \in V$ τότε

$$\langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k\} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Πρόταση

Αν U, W είναι υπόχωροι ενός δ.χ. V , τότε το άθροισμα τους είναι υπόχωρος του V , ο οποίος περιέχει τους U, W .

Απόδειξη:

- $0 = 0 + 0 \in U + W$.
- Έστω $v_1, v_2 \in U + W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $\lambda v_1 + v_2 \in U + W$.
- $v_1 = u_1 + w_1$ για κάποια $u_1 \in U, w_1 \in W$.
- $v_2 = u_2 + w_2$ για κάποια $u_2 \in U, w_2 \in W$.
- $\lambda v_1 + v_2 = \lambda(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (\lambda u_1 + u_2) + (\lambda w_1 + w_2)$
- Όμως $U \leq V$ άρα $\lambda u_1 + u_2 = u \in U$
- Όμοια $\lambda w_1 + w_2 = w \in W$.
- Άρα $\lambda v_1 + v_2 = u + w \in U + W$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $u \in U$ έχουμε $u = u + 0 \in U + W$. Άρα $U \subseteq U + W$. Όμοια $W \subseteq U + W$.

Πρόταση

Έστω U, W υπόχωροι ενός δ.χ. V . Τότε $U + W = \langle U \cup W \rangle$.

Απόδειξη:

Έστω $v = u + w \in U + W$ με $u \in U$ και $w \in W$.

- $u, w \in U \cup W$, άρα $u, w \in \langle U \cup W \rangle$, άρα $u + w \in \langle U \cup W \rangle$.
- Άρα $U + W \subseteq \langle U \cup W \rangle$.

Αντίστροφα, έστω $v \in \langle U \cup W \rangle$.

- $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$, με $v_i \in U \cup W$, $1 \leq i \leq k$.
- $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i + \sum_{i \in J} \lambda_i v_i$ με $v_i \in U$ για $i \in I$ και $v_i \in W$ για $i \in J$.
- $v = u + w$, με $u = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \in U$, $w = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i \in W$.
- Άρα $\langle U \cup W \rangle \subseteq U + W$.

Παραδείγματα

1. $\langle (1, 0, 0) \rangle + \langle (0, 1, 0) \rangle + \langle (0, 0, 1) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$

2. Γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$

$$\langle e_1 \rangle + \cdots + \langle e_n \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

3. Στον $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$

$$\langle 1 \rangle + \langle x \rangle + \cdots + \langle x^n \rangle = \langle 1, x, \dots, x^n \rangle = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$$

4. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται άρτια αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζεται περιττή αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

- $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ άρτια}\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ και $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ περιττή}\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- Για $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = f^+(x) + f^-(x)$
- Δείτε ότι $f^+(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) \in U$ και $f^-(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) \in W$.
- Άρα $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = U + W$.

Ορισμός

Έστω υπόχωροι U, W ενός δ.χ. V . Τότε το άθροισμα $U + W$ ονομάζεται *ευθύ* και συμβολίζεται $U \oplus W$ αν $U \cap W = \{0\}$.

Γενικότερα, εάν $U_1, \dots, U_k$ υπόχωροι του V , τότε το άθροισμα τους $U_1 + \dots + U_k$ ονομάζεται *ευθύ* εάν $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$ για $1 \leq i \leq k$. Συμβολίζουμε $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Παραδείγματα

1. Το άθροισμα $\langle(1, 0, 0)\rangle + \langle(0, 1, 0)\rangle$ είναι ευθύ.

- Έστω $v \in \langle(1, 0, 0)\rangle \cap \langle(0, 1, 0)\rangle$. Τότε $v = x(1, 0, 0) = y(0, 1, 0)$ για κάποια $x, y \in \mathbb{R}$.
- Άρα $x = y = 0$. Άρα $v = 0$.

2. Γενικότερα, το $\langle e_1 \rangle + \dots + \langle e_n \rangle$ είναι ευθύ.

- Έστω $v \in \langle e_i \rangle \cap (\langle e_1 \rangle + \dots + \langle e_{i-1} \rangle + \langle e_{i+1} \rangle + \dots + \langle e_n \rangle)$
- Τότε $v = \lambda_i e_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j e_j$
- Η i -συνιστώσα κάθε διανύσματος στο 2ο μέλος είναι ίση με 0.
- Η i -συνιστώσα του διανύσματος στο 1ο μέλος είναι ίση με λ_i .
- Άρα $\lambda_i = 0$. Για $i = 1, \dots, n$. Άρα $v = 0$.

Θεώρημα

Έστω U, W υπόχωροι ενός δ.χ. V . Το άθροισμα $U + W$ είναι ευθύ αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα του χώρου $U + W$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $u + w$ με $u \in U, w \in W$.

Απόδειξη:

Έστω ότι το $U + W$ είναι ευθύ.

- Ας υποθέσω ότι για κάποιο $v \in U + W$ έχω $v = u + w = u' + w'$ με $u, u' \in U$ και $w, w' \in W$.
- Τότε $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$.
- Άρα $u - u' = w' - w = 0$.

Αντίστροφα, ας υποθέσω ότι κάθε $v \in U + W$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $u + w$ με $u \in U, w \in W$.

- Έστω $v \in U \cap W$.
- Όμως $v = v + 0 = 0 + v$.
- Άρα $v = 0$.

Παράδειγμα

Έστω $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Έστω $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ και $W = \langle v_3, v_4 \rangle$.

Τότε $U + W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$.

Όμως $v_3 = v_1 + v_2 \in U \cap W$, άρα το άθροισμα δεν είναι ευθύ.

Πάρτε για παράδειγμα, $v = (1, 2, 3) \in U + W$. Τότε

$$\begin{aligned}x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 &= v \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1 - x_3, 2 - x_3, x_3, 3), \quad x_3 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Άρα $v = v_1 + 2v_2 + 3v_4 = v_2 + v_3 + 3v_4$.