# Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

## Ορισμός [Γραμμικός συνδυασμός]

Έστω $V$ ένας δ.χ. και $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ένα άθροισμα της μορφής $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, με $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, ονομάζεται *γραμμικός συνδυασμός* των $v_1, \ldots, v_n$ με συντελεστές τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
Εάν $S \subseteq V$, τότε ένας γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $S$ είναι ένα γραμμικός συνδυασμός *πεπερασμένου* πλήθους στοιχείων του $S$.

## Παραδείγματα

- $2 \cdot (1, -1, 0) + 3 \cdot (\sqrt{2}, 0, 1)$ είναι γρ. συνδ. των $(1, -1, 0), (\sqrt{2}, 0, 1)$
- $(1, 2, 3)$ είναι γρ. συνδ. των $(1, 2, 3)$
- $(1, 2, 3) - 2 \cdot (1, 4, 6) + (1, -1, 0)$ είναι ένας γρ. συνδ. στοιχείων του $\{(1, y, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}$
- $(0, 0, 0)$ είναι γρ. συνδ. οποιονδήποτε διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$
- Το $\sum_{k=1}^{\infty}(0, \frac{1}{k^2}, 0)$ *δεν* είναι γρ. συνδυασμός!

## Παραδείγματα

- Το τυχόν $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως γρ. συνδ. των $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1).$$

- Το τυχόν πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ γράφεται ως γρ. συνδ. των $1, x, \ldots, x^n$.

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n.$$

- Μπορεί ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & x+y \\ x+y & x+y \end{pmatrix} \implies \\ x = 1, x+y = 0, x+y = 1 & \qquad \text{αδύνατο!} \end{aligned}$$

Παρατήρηση:
Εάν $V$ είναι δ.χ. και $S \subseteq V$, τότε το σύνολο $S$ (γενικά) δεν είναι υπόχωρος του $V$.
Μας ενδιαφέρει ο "μικρότερος" υπόχωρος του $V$ που περιέχει το σύνολο $S$.

**Ορισμός [Γραμμική θήκη]**

Έστω δ.χ. $V$ και $S \subseteq V$. Η τομή όλων των υποχώρων του $V$ που περιέχουν το $S$, ονομάζεται γραμμική θήκη του $S$ (εντός του $V$). Τη συμβολίζουμε με $\langle S \rangle$.

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq U \leq V} U$$

- Υπάρχει τουλάχιστον ένας τέτοιος υπόχωρος $U$: ο $V$.
- Το $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος του $V$ ως τομή υποχώρων.
- $S \subseteq \langle S \rangle$.
- Αν $W \leq V$ και $S \subseteq W$ τότε $\langle S \rangle \subseteq W$.
- Αν $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, γράφουμε $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

### Θεώρημα

Έστω δ.χ. $V$ και $S \subseteq V$. Τότε

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \ : \ k \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \ldots, v_k \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Απόδειξη:

- Έστω $W = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \ : \ k \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \ldots, v_k \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. Θα δείξουμε ότι $\langle S \rangle = W$.
- Το $W$ είναι υπόχωρος του $V$ (κριτήριο υπόχωρου)
- Αν $v \in S$, τότε $v = 1 \cdot v \in W$. Άρα $S \subseteq W$. Άρα $\langle S \rangle \subseteq W$
- Έστω $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in W$. Θα δείξουμε ότι $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in \langle S \rangle$
- Έστω $S \subseteq U \leq V$. Τότε $v_i \in U$, για $1 \leq i \leq k$
- Άρα $a_i v_i \in U$, για $1 \leq i \leq k$. Άρα $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in U$
- Άρα $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in \bigcap_{S \subseteq U \leq V} U = \langle S \rangle$
- Άρα $W \subseteq \langle S \rangle$

### Ορισμός

Αν $\langle S\rangle = W$, τότε λέμε ότι ο υπόχωρος $W$ *παράγεται* από το σύνολο $S$.
Εάν υπάρχουν διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ τέτοια ώστε $W = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, λέμε ότι ο $W$ είναι *πεπερασμένα παραγόμενος*.

Παρατηρήσεις:

- Εξ' ορισμού $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$.
- Έστω $U \subseteq V$. Τότε $U \leq V \iff U = \langle U\rangle$.
- Εαν $S \subseteq T \subseteq V$, τότε $\langle S\rangle \leq \langle T\rangle$.

## Παραδείγματα

1. $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \implies \mathbb{R}^n \subseteq \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

2. $\langle 1, x, \ldots, x^n \rangle = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n \in \langle 1, x, \ldots, x^n \rangle \implies \mathbb{R}[x]_{\leq n} \subseteq \langle 1, x, \ldots, x^n \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq n}$$

3. $\langle (1,0,0), (0,1,0), (1,1,1) \rangle = \mathbb{R}^3$
Αρκεί να δείξουμε ότι $(a, b, c) \in \langle (1,0,0), (0,1,0), (1,1,1) \rangle$ για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (a,b,c) & = & x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(1,1,1) \iff \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \\ (x,y,z) & = & (a-c, b-c, c) \end{array}$$

Πραγματικά, $(a,b,c) = (a-c)(1,0,0) + (b-c)(0,1,0) + c(1,1,1)$.

### Θεώρημα

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^m$. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathbb{R}^m$ τις στήλες του πίνακα $A$. Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν $b \in \langle \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \rangle$.

Απόδειξη:
Το θεώρημα προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση,

$$\text{Για } \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \;\; Ax = x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{a}_n.$$

**Πρόταση**

Έστω $V$ δ.χ. και $v_1, \ldots, v_n, u \in V$. Τότε $\langle v_1, \ldots, v_n, u \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ αν και μόνο αν $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ για κάποιους $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη:
Αν $\langle v_1, \ldots, v_n, u \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ τότε $u \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$...

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ για κάποιους $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.
Αρκεί να δείξω ότι $\langle v_1, \ldots, v_n, u \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ (γιατί;)

- Έστω $w \in \langle v_1, \ldots, v_n, u \rangle$. Τότε $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n + \beta u$.
- Άρα $w = (\beta_1 + \beta \alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_n + \beta \alpha_n) v_n$.
- Άρα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.