

Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ορισμός

Έστω A, B δύο σύνολα. Ορίζουμε το καρτεσιανό τους γινόμενο $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Γενικότερα, για n σύνολα $A_1, \dots, A_n$ ορίζουμε $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, \text{ για } 1 \leq i \leq n\}$.

Εάν $A_1 = \dots = A_n = A$, γράφουμε $A_1 \times \dots \times A_n = A^n$.

Παραδείγματα

1. $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
2. $\{1, 2\}^2 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
3. Είναι το σύνολο $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων;
4. Είναι ο κυκλικός δίσκος $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων;

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένο δύο πράξεις:

- Πρόσθεση: $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (v, u) \mapsto v + u$

Για κάθε $v, u, w \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν

1. $v + u = u + v$
2. $(v + u) + w = v + (u + w)$
3. υπάρχει $0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $v + 0 = v$
4. υπάρχει $v' \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $v + v' = 0$

- Πολ/σμός με στοιχεία του $\mathbb{R}$: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και κάθε $v, u, w \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν

1. $\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$
2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
3. $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
4. $1 \cdot v = v$

Ορισμός [Διανυσματικός χώρος]

Ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$: $V \times V \longrightarrow V$ και $\cdot$: $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες, ονομάζεται *διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος*.

Για κάθε $v, u, w \in V$ ισχύουν

1. $v + u = u + v$
2. $(v + u) + w = v + (u + w)$
3. υπάρχει $0 \in V$ τέτοιο ώστε $v + 0 = v$
4. υπάρχει $v' \in V$ τέτοιο ώστε $v + v' = 0$

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και κάθε $v, u, w \in V$ ισχύουν

1. $\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$
2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
3. $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
4. $1 \cdot v = v$

Παραδείγματα

1. Το σύνολο $\mathbb{R}^n$
2. Το σύνολο $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$
3. Το σύνολο $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών
4. Το σύνολο των συναρτήσεων $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
5. Το σύνολο των συναρτήσεων $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$
6. Το σύνολο των πολωνύμων βαθμού $< n$ με συντελεστές στο $\mathbb{R}$:
 $\mathbb{R}[x]_{<n} = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} : a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i < n\}.$

Πρόταση

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε

1. Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $+$ είναι μοναδικό.
2. Το αντίθετο στοιχείο του $v \in V$ είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με $-v$.

Απόδειξη:

1. Έστω $0, 0' \in V$ ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης. Τότε

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

2. Έστω v', v'' αντίθετα στοιχεία του v . Τότε

$$v' = v' + 0 = v' + (v + v'') = (v' + v) + v'' = 0 + v'' = v''.$$

Θεώρημα [Νόμος της διαγραφής]

Έστω $u, v, w \in V$, τότε $u + v = u + w \implies v = w$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}u + v &= u + w \implies \\(-u) + (u + v) &= (-u) + (u + w) \implies \\(-u + u) + v &= (-u + u) + w \implies \\0 + v &= 0 + w \implies \\v &= w\end{aligned}$$

Πρόταση

Για κάθε $v \in V$, και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν

1. $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ή } v = 0.$
2. $-v = (-1) \cdot v$ και γενικότερα $-(\lambda \cdot v) = (-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v).$

Απόδειξη:

1. Έχουμε $0 \cdot v = 0 + 0 \cdot v$. Επίσης, $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$.

Άρα $0 + 0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \implies 0 = 0 \cdot v$. Παρόμοια δείχνουμε ότι $\lambda \cdot 0 = 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\lambda \cdot v = 0$. Αν $\lambda = 0$ τελείωσα. Αν $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot v &= 0 \implies \\ \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) &= \lambda^{-1} \cdot 0 \implies \\ (\lambda^{-1} \lambda) \cdot v &= 0 \implies \\ 1 \cdot v &= 0 \implies \\ v &= 0\end{aligned}$$

Απόδειξη (συνέχεια)

2.

$$(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = 0,$$

άρα $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v)$.

Επίσης,

$$\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (v + (-v)) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

άρα $\lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$.

Το $-v = (-1) \cdot v$ είναι ειδική περίπτωση, για $\lambda = 1$.

Πρόταση

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $v, u \in V$.

1. Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda v = \lambda u$, τότε $v = u$.
2. Αν $v \neq 0$ και $\lambda v = \mu v$, τότε $\lambda = \mu$.

Απόδειξη:

1. Έστω ότι $\lambda \neq 0$ και

$$\begin{aligned}\lambda v &= \lambda u \implies \\ \lambda v + -(\lambda u) &= 0 \implies \\ \lambda v + \lambda(-u) &= 0 \implies \\ \lambda(v - u) &= 0 \implies \\ v - u &= 0 \implies \\ v &= u\end{aligned}$$

2. Άσκηση για το σπίτι...

Ορισμός [Υπόχωρος]

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο του $U \neq \emptyset$ ονομάζεται *υπόχωρος* του V αν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V . Δηλαδή εάν

1. Για κάθε $v, u \in U$, ισχύει $v + u \in U$
2. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $v \in U$, ισχύει $\lambda v \in U$.

Τότε γράφουμε $U \leq V$.

Πρόταση [Κριτήριο υπόχωρου]

Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V , είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $v, u \in U$ ισχύει $\lambda v + u \in U$.

Απόδειξη:

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του κριτηρίου. Άρα $U \neq \emptyset$

1. Ας πάρουμε $v, u \in U$. Τότε $v + u = 1 \cdot v + u \in U$.
2. Ας πάρουμε $v \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\lambda v = \lambda v + 0 \in U$.

Αντίστροφα, έστω ότι ο U είναι υπόχωρος του V . Άρα $U \neq \emptyset$

1. Ας πάρουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v, u \in U$.
2. $\lambda v \in U$
3. $u \in U$
4. Άρα $\lambda v + u \in U$.

Παραδείγματα

1. Δ.χ. V και $U = \{0\} \leq V$
2. Δ.χ. V και $U = V \leq V$
3. Δ.χ. $V, v \in V$ και $U = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \leq V$
4. Αν $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \leq \mathbb{R}^n$
- 5.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \leq \text{Mat}_2(\mathbb{R})$$

6. Αν $m \leq n$, τότε $\mathbb{R}[x]_{\leq m} \leq \mathbb{R}[x]_{\leq n}$
7. Αν $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ και $U = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\} \leq V$

Παραδείγματα

1. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \not\leq \mathbb{R}^2$
2. Αν $0 \notin U$ τότε $U \not\leq V$
3. $U = \{(x, 2x, x + 1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \not\leq \mathbb{R}^3$
4. Μία ευθεία στο επίπεδο είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν περιέχει την αρχή των αξόνων.
5. Για $b \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $P_b = \{b + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$. $P_b \leq \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ αν και μόνο αν $b = 0$.

Πρόταση [Τομή υποχώρων]

Έστω U, W υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V . Τότε το σύνολο $U \cap W$ είναι υπόχωρος του V .

Απόδειξη:

θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο.

- Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u, w \in U \cap W$. Θα δείξουμε ότι $\lambda u + w \in U \cap W$.
- $u, w \in U$ και $U \leq V$ άρα $\lambda u + w \in U$.
- $u, w \in W$ και $W \leq V$ άρα $\lambda u + w \in W$.
- Άρα $\lambda u + w \in U \cap W$.

Παράδειγμα

Έστω οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y, z) : x + y - z = 0\} \\W &= \{(x, y, z) : -x + y + 3z = 0\}.\end{aligned}$$

Υπολογίστε την τομή τους $U \cap W$.

Απάντηση:

Η τομή $U \cap W$ περιέχει διανύσματα που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες. Δηλαδή

$$U \cap W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

Το $U \cap W$ είναι το σύνολο λύσεων του συστήματος $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $U \cap W = \{z(2, -1, 1) : z \in \mathbb{R}\}$.