Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Οι αντίστροφοι των πινάκων διάτμησης, πολλαπλασιασμού και εναλλαγής

- Έστω B ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στον πίνακα A την πράξη γραμμών $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$.
- Έστω C ο πίνακας που προκύπτει αν εφαρμόσουμε στον B την πράξη γραμμών $r_i \leftarrow r_i - \lambda r_j$.
- Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι δύο αυτές πράξεις αλληλοαναιρούνται, δηλαδή ότι $A = C$, ή σχηματικά ότι
$$A \xrightarrow{r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j} B \xrightarrow{r_i \leftarrow r_i - \lambda r_j} C = A.$$
- Με γλώσσα πολλαπλασιασμού πινάκων, το παραπάνω εκφράζεται και ως εξής:
$$A \xrightarrow{r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j} E_{i,j}(\lambda) \cdot A \xrightarrow{r_i \leftarrow r_i - \lambda r_j} E_{i,j}(-\lambda) \cdot E_{i,j}(\lambda) \cdot A = A.$$
- Δεδομένου ότι το παραπάνω ισχύει για κάθε A, αν πάρουμε την τελευταία εξίσωση για $A = I$, παίρνουμε $E_{i,j}(-\lambda) \cdot E_{i,j}(\lambda) = I \Rightarrow E_{i,j}(\lambda)^{-1} = E_{i,j}(-\lambda)$.
- Με την ίδια λογική, μπορούμε να δούμε ότι $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$ και ότι $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$. (Άσκηση)

Άνω τριγωνικοί, κάτω τριγωνικοί και διαγώνιοι πίνακες

Ορισμός

- Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται *άνω τριγωνικός*, εάν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται *κάτω τριγωνικός*, εάν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την διαγώνιο είναι ίσα με 0.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του, εκτός εκείνων της κεντρικής διαγωνίου, είναι 0, ονομάζεται *διαγώνιος*.

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix} \text{ και } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

τότε ο A είναι άνω τριγωνικός, ο B είναι κάτω τριγωνικός και ο C είναι διαγώνιος.

Παρατήρηση

Ένας πίνακας διάτμησης είναι είτε άνω, είτε κάτω τριγωνικός, ενώ ένας πίνακας πολλαπλασιασμού είναι διαγώνιος.

Μια απλή ιδιότητα

Λήμμα

Αν οι A και B είναι αμφότεροι άνω τριγωνικοί, κάτω τριγωνικοί ή διαγώνιοι ίδιας μορφής (διάστασης), τότε το ίδιο συμβαίνει και με τον AB.

Απόδειξη:

- Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση που A και B αμφότεροι άνω τριγωνικοί. Αυτό είναι ισοδύναμο με $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$ για κάθε $i > j$. Τότε, αν $i > j$, έχουμε ότι

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{i,k} B_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} A_{i,k} B_{k,j} = 0 + 0 = 0.$$

- Ομοίως αποδεικνύουμε και την περίπτωση που A και B είναι κάτω τριγωνικοί. (Άσκηση)
- Καταρχάς παρατηρήσουμε ότι ένας πίνακας είναι διαγώνιος αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικός. Άρα, αν A και B διαγώνιοι, τότε A και B ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικοί, επομένως, από τα παραπάνω, ο AB είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικός, άρα διαγώνιος.

Εισαγωγή

- Έχουμε ήδη δει, πώς μπορούμε, μέσω του πολλαπλασιασμού εξ' αριστερών με τους στοιχειώδεις πίνακες, να επιφέρουμε σε έναν πίνακα τον ίδιο μετασχηματισμό που επιφέρει και μια πράξη γραμμών.
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ και ενδιαφερόμαστε να λύσουμε την εξίσωση $Ax = b$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $b \in \mathbb{R}^n$.
- Ας πάρουμε για παράδειγμα την περίπτωση

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Τότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή

- Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή και μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση με ανάδρομη αντικατάσταση.
- Με άλλα λόγια, κάναμε διαδοχικά της εξής πράξεις γραμμών:
  1. $r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1$
  2. $r_3 \leftarrow r_3 + r_1$
  3. $r_3 \leftarrow r_3 + r_2$.
- Όμως, όπως είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη, αυτό είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό από αριστερά με τους εξής πίνακες:
  1. $E_{2,1}(-2)$.
  2. $E_{3,1}(1)$.
  3. $E_{3,2}(1)$.
- Δηλαδή η απαλοιφή Gauss μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$[A : b] \to E_{2,1}(-2)[A : b] \to E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)[A : b] \to E_{3,2}(1)E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)[A : b].$$

  Που σημαίνει ότι το αρχικό μας σύστημα μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\Big[\big(E_{3,2}(1)E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)\big)A\Big]x = \big(E_{3,2}(1)E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)\big)b$$

Οι τριγωνικοί πίνακες

- Αν θέσουμε $U = \big(E_{3,2}(1)E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)\big)A$, η τελευταία γίνεται:
$$Ux = y,$$
όπου $y = \big(E_{3,2}(1)E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)\big)b$.
- ενώ αν επίσης θέσουμε
$L = \big(E_{3,2}(1)E_{3,1}(1)E_{2,1}(-2)\big)^{-1} = E_{2,1}(-2)^{-1}E_{3,1}(1)^{-1}E_{3,2}(1)^{-1} = E_{2,1}(2)E_{3,1}(-1)E_{3,2}(-1)$,
παίρνουμε
$$Ly = b.$$

Τώρα ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις:

1. Ο πίνακας U ισούται με το αριστερό μέρος του επαυξημένου πίνακα, όταν τον έχουμε μετατρέψει σε κλιμακωτή μορφή, με άλλα λόγια, είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.
2. Ο πίνακας L είναι γινόμενο κάτω τριγωνικών πινάκων, επομένως είναι κάτω τριγωνικός. Επιπλέον, επειδή οι επιμέρους (κάτω τριγωνικοί) πίνακες $E_{3,2}(-1)$, $E_{3,1}(-1)$ και $E_{2,1}(2)$ έχουν 1 στην κεντρική τους διαγώνιο, το ίδιο θα ισχύει και για το γινόμενό τους. (Άσκηση)
3. Μια τέτοια μετατροπή είναι πάντα εφικτή, αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε να μην χρειαστεί να κάνουμε κάποια εναλλαγή γραμμών κατά την απαλοιφή Gauss. Μάλιστα, οι πίνακες L και U εξαρτώνται αποκλειστικά από τον πίνακα A και όχι από το διάνυσμα b.
4. $A = LU$.

Επίλυση του συστήματος

Ας πούμε τώρα ότι έχουμε βρει τους παραπάνω πίνακες L και U. Τότε μπορούμε να λύσουμε το σύστημα $Ax = b$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Επίλυση του συστήματος $Ly = b$ με ευθεία αντικατάσταση.
2. Επίλυση του συστήματος $Ux = y$ με ανάδρομη αντικατάσταση, όπου y η λύση του προηγούμενου συστήματος.

Ας δούμε τώρα γιατί η παραπάνω μέθοδος είναι σωστή.
Έστω y λύση του $Ly = b$ και x λύση του $Ux = y$. Τότε,

$$Ly = b \overset{y=Ux}{\Longrightarrow} LUx = b \overset{A=LU}{\Longrightarrow} Ax = b.$$

Παρατήρηση

Ένα σύστημα $Ax = b$, μπορεί να λύθεί τόσο με τον παραπάνω τρόπο, όσο και με απαλοιφή Gauss. Η απαλοιφή Gauss είναι πιο αποτελεσματική για επίλυση συστήματος με το χέρι, ενώ η επίλυση με χρήση των πινάκων L και U πλεονεκτεί όταν κάνουμε υλοποίηση σε υπολογιστή.

Ας δούμε αυτή τη μέθοδο σε δράση στο προηγούμενο παράδειγμα!

Παράδειγμα

Ξεκινάμε από την εξίσωση

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Όπως είδαμε πριν, μπορούμε να γράψουμε $A = LU$, όπου

$$L = E_{2,1}(-2)^{-1} E_{3,1}(1)^{-1} E_{3,2}(1)^{-1} = E_{2,1}(2) E_{3,1}(-1) E_{3,2}(-1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα

Θα λύσουμε το σύστημα $Ly = b$ με ευθεία αντικατάσταση:

$$\begin{cases} & y_1 = 5, \\ 2y_1 + y_2 = -2 \iff & y_2 = -12, \\ -y_1 - y_2 + y_3 = 9 \iff & y_3 = 2. \end{cases}$$

Τέλος, θα λύσουμε το σύστημα $Ux = y$, οπου $y = (5, -12, 2)$ με ανάδρομη αντικατάσταση:

$$\begin{cases} & x_3 = 2, \\ -8x_2 - 2x_3 = -12 \iff & x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \iff & x_1 = 1. \end{cases}$$

Παρατήρηση

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το $x = (1, 1, 2)$ αποτελεί λύση του αρχικού μας συστήματος

Μερικά σχόλια και ορισμοί

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα, διατυπώνουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Εάν στο $n \times n$ σύστημα $Ax = b$ η διαδικασία απαλοιφής καταλήγει σε κλιμακωτή μορφή, όπου όλες οι στήλες έχουν οδηγό, χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε κάποια εναλλαγή γραμμών, τότε ο πίνακας A γράφεται ως γινόμενο $A = LU$, όπου

- ο L είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στη διαγώνιο και
- ο U είναι άνω τριγωνικός, με τους οδηγούς στην διαγώνιο.

Ορισμός

Η παραπάνω παραγοντοποίηση λέγεται *ανάλυση (ή παραγοντοποίηση) LU*.

Πίνακες που δεν έχουν ανάλυση LU

- Μέχρι στιγμής, ασχοληθήκαμε με τετραγωνικούς αντιστρέψιμους πίνακες, που δεν χρειάστηκε κατά την απαλοιφή Gauss να κάνουμε κάποια εναλλαγή γραμμών. Τι συμβαίνει όμως αν έχουμε κάποιο πίνακα που δεν ικανοποιεί κάποια από αυτές τις συνθήκες;
- Θα ξεκινήσουμε με τετραγωνικούς, αντιστρέψιμους πίνακες, που χρειάζονται μια ή περισσότερες εναλλαγές γραμμών κατά την απαλοιφή Gauss.
- Σε αυτήν την περίπτωση, (αφού βρούμε ποιες εναλλαγές γραμμών θα χρειαστούν), τις πραγματοποιούμε πριν κάνουμε κάποια άλλη πράξη γραμμών.
- Έστω λοιπόν ότι έχουμε τον πίνακα A και θα χρειαστούμε τις εναλλαγές γραμμών $i_1 \leftrightarrow j_1, \ldots, i_k \leftrightarrow j_k$.
- Μετά τις εναλλαγές θα πάρουμε τον πίνακα $P_{i_k,j_k} \cdots P_{i_1,j_1} \cdot A$, όπου $P_{i_1,j_1}, \ldots, P_{i_k,j_k}$ οι αντίστοιχοι πίνακες εναλλαγής. Μάλιστα αν θέσουμε $P := P_{i_k,j_k} \cdots P_{i_1,j_1}$, έχουμε τον πίνακα PA, όπου P πίνακας μετάθεσης.
- Στον πίνακα PA δεν χρειάζεται πλέον κάποια εναλλαγή γραμμών και εφαρμόζεται η προηγούμενη θεωρία κανονικά, συνεπώς έχουμε μια παραγοντοποίηση της μορφής

$$PA = LU.$$

Ένα παράδειγμα

Ας δούμε για παράδειγμα την παραγοντοποίηση της μορφής $PA = LU$ του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θα ξεκινήσουμε την απαλοιφή Gauss, ώστε να βρούμε τον πίνακα μετάθεσης P (αν υπάρχει):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως εδώ έχουμε ότι οι εναλλαγές γραμμών που χρειάστηκαν ήταν (διαδοχικά) οι $r_1 \leftrightarrow r_2$ και $r_3 \leftrightarrow r_4$, άρα ο πίνακας μετάθεσης είναι ο $P = P_{3,4}P_{1,2}$.

Ένα παράδειγμα

Καταλήγουμε ότι

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τώρα θα εργαστούμε όπως γνωρίζουμε στον PA για να βρούμε την ανάλυση LU:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως ο τελευταίος πίνακας είναι ο U και έχουμε ακόμα ότι

$$L = (E_{3,1}(-2)E_{3,2}(-3))^{-1} = E_{3,2}(3)E_{3,1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ιδιόμορφοι και μη ιδιόμορφοι πίνακες

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας είναι *ιδιόμορφος* εάν η διαδικασία της απαλοιφής Gauss (με εναλλαγές γραμμών) καταλήγει σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα με ένα ή περισσότερα μηδενικά στην διαγώνιο. Αντίθετα, αν η ίδια διαδικασία βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών, τότε ο πίνακας είναι λέγεται *μη ιδιόμορφος*.

- Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο A είναι μη ιδιόμορφος.
- Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι ιδιόμορφος αν και μόνο αν είναι μη αντιστρέψιμος και μη ιδιόμορφος αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμος.

Συνοψίζοντας:

Θεώρημα

Έστω το $n \times n$ σύστημα $Ax = b$.

1. Αν ο A είναι ιδιόμορφος, τότε το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση.
2. Αν ο A είναι μη ιδιόμορφος, τότε υπάρχει κάποιος πίνακας μετάθεσης P, τέτοιος ώστε ο PA να έχει ανάλυση LU και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Η γενίκευση σε $m \times n$ συστήματα

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση του συστήματος $Ax = b$, με $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Εύκολα μπορούμε να φανταστούμε ότι η διαδικασία της απαλοιφής Gauss και πάλι δίνει αντίστοιχα αποτελέσματα με την περίπτωση των μη ιδιόμορφων πινάκων.

- Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε και πάλι να ξεκινήσουμε πραγματοποιώντας τις απαραίτητες εναλλαγές γραμμών, που θα ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό από αριστερά με έναν πίνακα μετάθεσης $P \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$.
- Μετά, θα κάνουμε τις πράξεις γραμμών που αντιστοιχούν σε κάτω τριγωνικούς πίνακες διάτμησης διάστασης m.
- Τέλος, θα πάρουμε έναν πίνακα συστήματος, που θα είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Συνολικά, έχουμε το εξής:

Θεώρημα

Σε κάθε πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, αντιστοιχεί:

1. ένας $m \times m$ πίνακας μετάθεσης P,
2. ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας L, με 1 στη διαγώνιο και
3. ένας $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή U,

τέτοιοι ώστε $PA = LU$.

Μερικά σχόλια και ένα παράδειγμα

- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τετραγωνικούς, ιδιόμορφους πίνακες.
- Ο αλγόριθμος επίλυσης συστημάτων που είδαμε πρωτύτερα για μη ιδιόμορφους πίνακες, εξακολουθεί να ισχύει.

Ας βρούμε τώρα κάποιους κατάλληλους πίνακες P, L, U για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εδώ παρατηρούμε ότι θα χρειαστεί η εναλλαγή γραμμών $r_2 \leftrightarrow r_3$. Έτσι, κάνουμε τις εξής πράξεις:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

Επομένως, $U = E_{3,1}(-1)P_{2,3}A$. Καταλήγουμε ότι $P = P_{2,3}$ και $L = (E_{3,1}(-1))^{-1} = E_{3,1}(1)$.

Βασικές έννοιες

Ορισμός

Ένα σύστημα $Ax = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ το *μηδενικό διάνυσμα*, λέγεται *ομογενές*.

1. Ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο, καθώς έχει πάντα την λύση $x = \mathbf{0}$. Η λύση αυτή λέγεται και *τετριμμένη* λύση.
2. Αν ο A είναι μη ιδιόμορφος, τότε το $\mathbf{0}$ είναι η μοναδική του λύση, ενώ αν ο A είναι τετραγωνικός ιδιόμορφος ή μη τετραγωνικός ενδέχεται να έχουμε και άλλες λύσεις.
3. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε και άλλες λύσεις αν και μόνο αν, κατά την απαλοιφή Gauss προκύψουν ελεύθερες μεταβλητές.
4. Η διαδικασία επίλυσης των ομογενών συστημάτων είναι ίδια με εκείνη των γενικών συστημάτων. Η μόνη διαφορά είναι ότι (επειδή το δεξί μέρος του επαυξημένου αποτελείται πάντα μόνο από 0) οι πράξεις είναι αρκετά πιο απλές.
5. Σε κάθε πίνακα A αντιστοιχεί ακριβώς ένα ομογενές. Επομένως έχει νόημα να μιλάμε για το *αντίστοιχο ομογενές σύστημα* ενός συστήματος.

Μια πρόταση

Πρόταση

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Αν $u, v \in \mathbb{R}^n$ είναι δύο λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax = \mathbf{0}$, τότε κάθε διάνυσμα της μορφής $\kappa u + \lambda v$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, είναι επίσης λύση του συστήματος.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $A(\kappa u + \lambda v) = \kappa A u + \lambda A v = \kappa \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ορισμός

Αν $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$, τότε ένα διάνυσμα της μορφής $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, λέγεται *γραμμικός συνδυασμός* των $u_1, \ldots, u_k$.

Πόρισμα

Αν ένα ομογενές σύστημα έχει κάποια μη μηδενική λύση, τότε θα έχει άπειρες λύσεις.

Μάλιστα (για λόγους που θα εξηγήσουμε αργότερα), οι άπειρες αυτές λύσεις είναι πάντα οι γραμμικοί συνδυασμοί κάποιων διανυσμάτων!

Πόρισμα

Ένα ομογενές σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

Ένα παράδειγμα

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Παίρνουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως όλες οι μεταβλητές μας είναι εξαρτημένες και έχουμε ως μοναδική την μηδενική λύση

$$(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Άλλο ένα παράδειγμα

Ας πάρουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y - z + 3w = 0. \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα έχουμε δύο εξαρτημένες (τα x και y) και δύο ελεύθερες (τα z και w). Λύνουμε το σύστημα ως $y = 2z - 3w$ και $x = -3z + 3w$ και η γενική μας λύση είναι η

$$(x, y, z, w) = (-3z + 3w, 2z - 3w, z, w) = z \cdot (-3, 2, 1, 0) + w \cdot (3, -3, 0, 1), \ z, w \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις μας είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(-3, 2, 1, 0)$ και $(3, -3, 0, 1)$.

Γενικά περί μη ομογενών συστημάτων

Ας ασχοληθούμε τώρα με το σύστημα $Ax = b$, με $b \neq \mathbf{0}$. Όπως έχουμε ήδη δει, αυτό το σύστημα μπορεί να έχει μια, καμία ή πολλές λύσεις.

- Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το σύστημα $Ax = b$ μπορεί να έχει λύση αν και μόνο αν το b μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
- Ας πάρουμε την περίπτωση που έχει λύση και ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2 λύσεις του συστήματος. Τότε παρατηρούμε ότι
$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = \mathbf{0},$$
δηλαδή το διάνυσμα $x_1 - x_2$ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς $Ax = 0$.
- Αντίθετα, αν x_1 μια λύση του $Ax = b$ και x_0 μία λύση το αντίστοιχου ομογενούς $Ax = 0$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι
$$A(x_1 + x_0) = Ax_1 + Ax_0 = b + \mathbf{0} = b,$$
δηλαδή το $x_1 + x_0$ είναι λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Ο συνδυασμός των παραπάνω μας δίνει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα

Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το b γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Έαν x_1 μια λύση του και x_0 η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς, τότε η γενική λύση του $Ax = b$ δίνεται από τον τύπο
$$x = x_1 + x_0.$$

Ένα παράδειγμα

Ας πάρουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y - z + 3w = 2. \end{cases}$$

Όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς είναι η

$$(x, y, z, w) = (-3z + 3w, 2z - 3w, z, w) = z \cdot (-3, 2, 1, 0) + w \cdot (3, -3, 0, 1), \; z, w \in \mathbb{R}.$$

Αν εφαρμόσουμε την απαλοιφή Gauss θα πάρουμε ότι η γενική λύση του μη ομογενούς είναι

$$(x, y, z, w) = (-3z + 3w, 2z - 3w + 1, z, w) = (0, 1, 0, 0) + z \cdot (-3, 2, 1, 0) + w \cdot (3, -3, 0, 1), \; z, w \in \mathbb{R}.$$

Η τάξη ενός πίνακα

Ορισμός

Το πλήθος των οδηγών που εμφανίζονται στον πίνακα $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, κατά την απαλοιφή Gauss, ονομάζεται *τάξη* του A.

Η τάξη του A ισούται και με το πλήθος των εξαρτημένων μεταβλητών που θα προκύψουν κατά την απαλοιφή Gauss, που ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού U. Έστω τώρα ότι r είναι η τάξη του A.

- Αν $r = n$, τότε το αντίστοιχο ομογενές έχει μοναδική λύση (την μηδενική) και επομένως, το μη ομογενές $Ax = b$ έχει μια ή καμμία λύση.
- Εάν $r = m$, τότε (όπως θα δούμε αργότερα) κάθε b γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, συνεπώς το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b.
- Εάν $r = m = n$, τότε ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και μη ιδιόμορφος, που σημαίνει ότι το $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε b.