Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ο μοναδιαίος πίνακας

Ορισμός

Ο τετραγωνικός πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις, ονομάζεται *ταυτοτικός* ή *μοναδιαίος*, και συμβολίζεται I ή I_n αν θέλουμε να επισημάνουμε το μέγεθος του πίνακα.

- Για παράδειγμα, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Ορίζουμε (για συγκεκριμένο n), ως e_i την στήλη (ή το διάνυσμα) με 0 σε όλα τα στοιχεία με δείκτη $\neq i$ και 1 στο στοιχείο με δείκτη i. Π.χ., αν $n = 3$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Με την χρήση του παραπάνω συμβολισμού, παρατηρούμε ότι

$$I_n = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n).$$

Ο μοναδιαίος πίνακας

Πρόταση

Αν $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, τότε
$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A.$$

Απόδειξη: Εξ' ορισμού, $I_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$
Ως εκ τούτου, αν $B = A \cdot I_n$, έχουμε ότι

$$B_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} I_{k,j} = A_{i,j},$$

με άλλα λόγια $A \cdot I_n = B = A$.

- Η απόδειξη του δεύτερου σκέλους είναι όμοια και αφήνεται ως άσκηση.
- Η ιδιότητα αυτή του I_n επεξηγεί την ονομασία *μοναδιαίος*, ενώ είναι ξεκάθαρο ότι στον κόσμο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων τον καθιστά τον αντίστοιχο του αριθμού 1.

Αντιστρέψιμοι πίνακες

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται *αντιστρέψιμος* αν υπάρχει κάποιος B τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο B λέγεται *αντίστροφος* του A.

Στην πράξη, αρκεί η μια από τις δύο παραπάνω συνθήκες, όπως μας εξασφαλίζει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Εαν A τετραγωνικός, τότε υπάρχει κάποιος B τέτοιος ώστε $AB = I$, αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος C, τέτοιος ώστε $CA = I$.

Παρατήρηση: Την παραπάνω πρόταση θα την αποδείξουμε αργότερα κατά την διάρκεια του μαθήματος.

Πρόταση

Ο αντίστροφος του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικός και συμβολίζεται με A^{-1}.

Απόδειξη: Έστω B, C τέτοιο ώστε $AB = CA = I$. Τότε έχουμε:

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C.$$

Μερικά παραδείγματα

1. Εύκολα βλέπουμε ότι
$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2,$$
επομένως $\left(\begin{smallmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1 & -5\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

2. Αν $A = \begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, τότε αν $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ και $C = BA$, παρατηρούμε ότι
$$C_{1,1} = B_{1,1}A_{1,1} + B_{1,2}A_{2,1} = 0,$$
που σημαίνει ότι για κάθε $C \neq I$, δηλαδή για κάθε $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $BA \neq I$. Αυτό δείχνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Γενικά θα μάθουμε τρόπους τόσο να διαπιστώνουμε εύκολα κατά πόσον ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος ή όχι και (αν είναι) να βρίσκουμε τον αντίστροφό του.

Η περίπτωση μηδενικής στήλης ή γραμμής

Πρόταση

Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει μια μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη:

1. Έστω ότι η i-στη γραμμή του είναι μηδενική, δηλαδή $A_{i,j} = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Τότε, αν ο A ήταν αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$, έχουμε ότι $AB = I$, δηλαδή,

$$(AB)_{i,i} = I_{i,i} \Rightarrow (AB)_{i,i} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} B_{j,i} = 1 \Rightarrow 0 = 1,$$

   άτοπο!

2. Έστω ότι η j-στη στήλη του A είναι μηδενική, δηλαδή $A_{i,j} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε, αν ο A ήταν αντιστρέψιμος και $B = A^{-1}$, έχουμε ότι $BA = I$, δηλαδή,

$$(BA)_{i,i} = I_{i,i} \Rightarrow (AB)_{i,i} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} B_{i,j} A_{j,i} = 1 \Rightarrow 0 = 1,$$

   άτοπο!

Παράδειγμα

Οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 21 & 8 \end{pmatrix}$$

δεν είναι αντριστρέψιμοι γιατί έχουν μια μηδενική γραμμή ή στήλη αντίστοιχα.

Μερικές ιδιότητες

Πρόταση

Αν A και B αντιστρέψιμοι, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. A^{-1} αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη: Το πρώτο είναι προφανές. Για το δεύτερο παρατηρούμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = (AI)A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I.$$

Παρατήρηση

Από το παραπάνω εύκολα βλέπουμε ότι γενικότερα το αντίστροφο του γινομένου αντιστρέψιμων πινάκων, είναι το γινόμενο των αντίστροφών τους, αλλά γραμμένο ανάποδα.

Μερικές ιδιότητες

Πρόταση

Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $b \in \mathbb{R}^n$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Ax = b &\quad \overset{A^{-1}\cdot}{\Rightarrow} \\ A^{-1}Ax = A^{-1}b &\quad \Rightarrow \\ Ix = A^{-1}b &\quad \Rightarrow \\ x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Εν γένει, η μέθοδος που έχουμε ήδη δει για να λύνουμε συστήματα είναι πιο αποτελεσματική από την παραπάνω πράξη. Παρόλα αυτά, όπως θα δούμε, η παραπάνω ιδιότητα μας βοηθάει να υπολογίζουμε εύκολα τον αντίστροφο του A.

Εισαγωγή

- Όπως είδαμε μέχρι τώρα, ο αντίστροφος ενός πίνακα A, αν υπάρχει, είναι μοναδικός και, σε αυτήν την περίπτωση, η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$.
- Ας πούμε λοιπόν ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ας ονομάσουμε $B = A^{-1}$. Ακόμα, ας ονομάσουμε b_i την i-στή στήλη του B, ώστε $B = (b_1 \ \cdots \ b_n)$. Τότε έχουμε:

$$AB = I_n \iff A(b_1 \ \cdots \ b_n) = (e_1 \ \cdots \ e_n) \iff Ab_i = e_i, \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n.$$

- Το τελευταίο μας δείχνει ότι αν θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο του A, μπορούμε να βρούμε μια–μια τις στήλες του, λύνοντας τα συστήματα $Ab_i = e_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
- Αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας για κάθε i τον αντίστοιχο επαυξημένο πίνακα $(A \mid e_i)$ και κάνοντας απαλοιφή Gauss. Επίσης παρατηρήστε ότι κατά την απαλοιφή Gauss:
  1. τα στοιχεία της κάθε στήλης του επαυξημένου, αλληλεπιδρούν μόνο με στοιχεία της ίδιας στήλης και
  2. τα *βήματα* της απαλοιφής Gauss είναι πανομοιότυπα για συστήματα με ίδιο πίνακα συστήματος (δηλαδή ίδιο αριστερό μέρος επαυξημένου), αλλά διαφορετικό δεξί μέρος.
  3. Αυτό σημαίνει ότι αν έχω να λύσω πολλά συστήματα της μορφής $Ab_i = c_i$, μπορώ να τα λύσω ταυτόχρονα παίρνοντας *έναν* επαυξημένο πίνακα $(A \mid c_1 \ \cdots \ c_n)$ και δουλεύοντας κανονικά.

Περιγραφή

- Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωσή μας, μπορούμε να ξεκινήσουμε με *έναν* επαυξημένο

$$(A \mid e_1 \ \cdots \ e_n) = (A \mid I_n)$$

  και να καταλήξουμε σε έναν πίνακα της μορφής

$$(A' \mid C'),$$

  όπου ο A' είναι κλιμακωτός.
- Το γεγονός ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, σημαίνει ότι τα αντίστοιχα συστήματα έχουν μοναδική λύση, άρα κάθε στήλη του A' έχει οδηγό.
- Με την σειρά του αυτό θα σημαίνει ότι (αντί να προχωρήσουμε σε ανάδρομη αντικατάσταση), κάνοντας κατάλληλες πράξεις γραμμών μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα ισοδύναμο επαυξημένο της μορφής

$$(I_n \mid B).$$

- Βλέπουμε ότι οι στήλες του B είναι ακριβώς οι λύσεις του $Ab_i = e_i$, με άλλα λόγια είναι οι στήλες του αντίστροφου!
- Η παραπάνω μέθοδος εύρεσης του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα λέγεται *απαλοιφή Gauss-Jordan*.

Παράδειγμα

Ας ελέγξουμε με την απαλοιφή Gauss-Jordan κατά πόσο ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και, αν ναι, ας βρούμε τον αντίστροφό του.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Παρατηρούμε ότι έχοντας φέρει το αριστερό μέρος του επαυξημένου σε κλιμακωτή μορφή, κάθε στήλη έχει οδηγό. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αυτό δείχνει ότι ο αρχικός μας πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Συνεχίζουμε με το δεύτερο μέρος της μεθόδου:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow -2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow -\frac{r_2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftarrow r_1 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1}).$$

Παράδειγμα

Ας ελέγξουμε με την απαλοιφή Gauss-Jordan κατά πόσο ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και, αν ναι, ας βρούμε τον αντίστροφό του.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Παρατηρούμε ότι, καθώς φέραμε το αριστερό μέρος του επαυξημένου σε κλιμακωτή μορφή, καταλήξαμε σε έναν πίνακα που δεν υπάρχει οδηγός σε κάθε στήλη.
- Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακάς μας δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ορισμός

Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, ονομάζουμε *ανάστροφο* του A τον $n \times m$ πίνακα του οποίου οι γραμμές είναι οι στήλες του A (και οι στήλες οι γραμμές του A). Ο ανάστροφος του A συμβολίζεται με A^T.
Πιο συγκεκριμένα, οι εγγραφές των δύο πινάκων συνδέονται από την σχέση

$$A_{i,j} = (A^T)_{j,i}, \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Βασικές ιδιότητες

Πρόταση

Αν $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ και $C \in \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbb{R})$, τότε:

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
3. $(AC)^T = C^T A^T$,
4. αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A^T είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Τα Στοιχεία 1–3 απορρέουν άμεσα από τους ορισμούς και αφήνονται ως άσκηση. Για το Στοιχείο 4, παρατηρούμε ότι

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I \overset{3.}{\Rightarrow} (A^{-1})^T \cdot A^T = I.$$

Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί πίνακες

Ορισμός

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας.

- Αν $A^T = A$, τότε ο A ονομάζεται *συμμετρικός*.
- Αν $A^T = -A$, τότε ο A ονομάζεται *αντισυμμετρικός*.

Παράδειγμα

1. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός.
2. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός.
3. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ δεν είναι ούτε συμμετρικός, ούτε αντισυμμετρικός.

Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί πίνακες

Λήμμα

Αν $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, τότε ο $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Μάλιστα ο A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού, ως εξής:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Η απόδειξη του παραπάνω είναι άμεση από τους διάφορους ορισμούς.Μάλιστα, εύκολα αποδεικνύεται και το εξής (η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση)

Λήμμα

Η παραπάνω γραφή του A ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού είναι μοναδική.

Ορισμοί

- Ο τετραγωνικός πίνακας, που έχει 1 στην κεντρική διαγώνιο και $\lambda \neq 0$ στην θέση i, j (με $i \neq j$) ονομάζεται *πίνακας διάτμησης* και συμβολίζεται με $E_{i,j}(\lambda)$.
- Ο διαγώνιος πίνακας, που έχει 1 όλες τις θέσεις εκτός της i, i όπου έχει $\lambda \neq 0$, ονομάζεται *πίνακας πολλαπλασιασμού* και συμβολίζεται με $D_i(\lambda)$.
- Ο τετραγωνικός πίνακας που έχει 1 στις θέσεις i, j και j, i, έχει 1 στη διαγώνιο, εκτός από τις θέσεις i, i και j, j, ενώ έχει 0 σε όλες τις άλλες θέσεις ονομάζεται *πίνακας εναλλαγής* και συμβολίζεται με $P_{i,j}$.

Παραδείγματα

$$E_{1,2}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι παραπάνω οικογένειες πινάκων απαρτίζουν τους *στοιχειώδεις πίνακες*, ενώ το γινόμενο πολλών πινάκων εναλλαγής, ονομάζεται *πίνακας μετάθεσης*.

Με μια προσεκτική ματιά στην πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων, εύκολα παρατηρούμε τα εξής:

1. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ από αριστερά με τον πίνακα διάτμησης $E_{i,j}(\lambda)$, το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας $B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, που προκύπτει από την πράξη γραμμών $r_i \leftarrow r_i + \lambda r_j$ στον A.
2. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ από αριστερά με τον πίνακα πολλαπλασιασμού $D_j(\lambda)$, το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας $B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, που προκύπτει από την πράξη γραμμών $r_j \leftarrow \lambda \cdot r_j$ στον A.
3. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ από αριστερά με τον πίνακα εναλλαγής $P_{i,j}$, το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας $B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, που προκύπτει από την πράξη γραμμών $r_j \leftrightarrow r_i$ στον A.

Με άλλα λόγια, ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση

Υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στις πράξεις γραμμών και στον πολλαπλασιασμό από αριστερά με στοιχειώδεις πίνακες.

Παρατήρηση

Αν πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα με έναν στοιχειώδη πίνακα *από δεξιά*, τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι θα πραγματοποιήσουμε την αντίστοιχη πράξη μεταξύ *στηλών*!

Μερικά παραδείγματα

Ας πάρουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_2 \leftarrow r_2 + \frac{r_1}{2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = E_{2,1}(1/2) \cdot A.$$

Ομοίως

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftarrow \frac{r_3}{2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = D_3(1/2) \cdot A.$$

Τέλος, ομοίως

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = P_{1,3} \cdot A.$$