Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Ορίζουμε:

- $\mathbb{R}^0 = \{0\}$
- για $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$
- Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα ονομάζουμε *διανύσματα*
- Τους πραγματικούς αριθμούς x_i θα τους ονομάζουμε συνιστώσες του διανύσματος $(x_1, \ldots, x_n)$

Παρατηρήσεις

- Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ έχει n συνιστώσες.
  - $(1, \sqrt{2}, -2) \in \mathbb{R}^3$
  - $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$
  - $(0, 0) \notin \mathbb{R}^3$
- $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_i = y_i$, για $i = 1 \ldots, n$.
  - Αν $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ τότε $x = 1, y = 2, z = 3$
  - $(1, 2, 3, 4) \neq (1, 2, 3, 5)$

Πράξεις στον $\mathbb{R}^n$

Πρόσθεση διανυσμάτων

Ορίζουμε την πρόσθεση διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{R}^n$ κατά συνιστώσα:

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n + y_n).$$

Δηλαδή $(x+y)_i = x_i + y_i$, για $i = 1, \ldots, n$.

Παραδείγματα

- $(1, 2, 3) + (-1, 0, 2) = (1 - 1, 2 + 0, 3 + 2) = (0, 2, 5)$
- $(1, 0, -1) + (-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$
- $(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$

Πράξεις στον $\mathbb{R}^n$

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ορίζουμε τον πολ/σμό αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ με διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ κατά συνιστώσα:

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, \lambda x_n).$$

Δηλαδή $(\lambda x)_i = \lambda x_i$, για $i = 1, \ldots, n$.

Παραδείγματα

- $2 \cdot (1, 2, 3) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (2, 4, 6)$
- $0 \cdot (1, 0, -1) = (0, 0, 0)$
- $\lambda \cdot (a, b, c, d) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$

Βασικές ιδιότητες πράξεων

Θεώρημα

Για κάθε $v, u, w \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

1. $v + u = u + v$
2. $(v + u) + w = v + (u + w)$
3. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
4. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
6. $1 \cdot u = u$

Απόδειξη (3):
Θα δείξουμε ότι η i συνιστώσα του διανύσματος στο αριστερό μέλος είναι ίση με την αντίστοιχη συνιστώσα στο δεξί μέλος.

$$(\lambda(u + v))_i = \lambda(u + v)_i = \lambda(u_i + v_i) = \lambda u_i + \lambda v_i = (\lambda u)_i + (\lambda v)_i.$$

Πίνακες

Ορισμός: $m \times n$ πίνακες

Ένας $m \times n$ πίνακας με εγγραφές πραγματικούς αριθμούς, είναι μία διάταξη mn αριθμών σε m γραμμές και n στήλες.

- Όταν γράφουμε $A = (a_{i,j})$, εννοούμε ότι στη γραμμή i και στήλη j (ή αλλιώς στη θέση i, j) του πίνακα A υπάρχει ο αριθμός $a_{i,j}$.
- Το i, j στοιχείο του πίνακα A θα το γράφουμε και $A_{i,j}$.
- Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με εγγραφές πραγματικούς αριθμούς, σύμβολίζουμε με $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
- Εάν $m = n$, ο πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός. Συνήθως γράφουμε $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.
- Εάν $A, B, \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = B$ αν και μόνο αν $A_{i,j} = B_{i,j}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Παραδείγματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1\times 4}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Πράξεις πινάκων

Πρόσθεση πινάκων

Έστω $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ορίζουμε το άθροισμα τους (και το συμβολίζουμε με $A + B$) να είναι ο $m \times n$ πίνακας C με $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$ για $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Παραδείγματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Πράξεις πινάκων

Πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε το βαθμωτό γινόμενο (και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot A$) να είναι ο $m \times n$ πίνακας C με $C_{i,j} = \lambda A_{i,j}$ για $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Παραδείγματα

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

- Υπάρχει μία 1-1 αντιστοίχιση

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

- Οι πράξεις στα σύνολα $\mathbb{R}^n$ και $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ "συμφωνούν".
- Θα ταυτίζουμε τα δύο σύνολα.

Βασικές ιδιότητες

Θεώρημα

Για κάθε $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
4. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$
6. $1 \cdot A = A$

Πράξεις πινάκων

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Ορίζουμε το γινόμενο τους (και το συμβολίζουμε $A \cdot B$) να είναι ο $m \times p$ πίνακας C με

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \\ &= A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,n}B_{n,j} \end{aligned}$$

για $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$.

Παρατηρήσεις

- Για να υπολογίσω το στοιχείο i, j χρειάζομαι
  - τη γραμμή i του 1ου πίνακα: $(A_{i,1} \ldots A_{i,n})$,
  - τη στήλη j του 2ου πίνακα: $\begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix}$.

Παρατηρήσεις

Αν $A = (A_{1,1} \ldots A_{1,n})$ και $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ \vdots \\ B_{n,1} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = (A_{1,1} \ldots A_{1,n}) \cdot \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ \vdots \\ B_{n,1} \end{pmatrix} = A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + \cdots + A_{1,n}B_{n,1}$$

Γενικά,

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,j} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 10 & 100 \\ 20 & 200 \\ 30 & 300 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + 2\cdot 20 + 3\cdot 30 & 1\cdot 100 + 2\cdot 200 + 3\cdot 300 \\ 4\cdot 10 + 5\cdot 20 + 6\cdot 30 & 4\cdot 100 + 5\cdot 200 + 6\cdot 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Μόνοι σας...

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} =$$

Βασικές ιδιότητες πολλαπλασιασμού

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), B, D \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R}), C \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Τότε

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
2. $A \cdot (B + D) = A \cdot B + A \cdot D$.

Απόδειξη (1): Οι πίνακες στα δύο μέλη είναι $m \times q$. Για $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le q$

$$((AB)C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{i,k} C_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} B_{l,k} C_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{i,l} B_{l,k} C_{k,j}$$

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} (BC)_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} \sum_{k=1}^{p} B_{l,k} C_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{i,l} B_{l,k} C_{k,j}$$