Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης   Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Βασικές παρατηρήσεις

Έχουμε το σύστημα

$$\Sigma_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

Αν εναλλάξουμε δύο εξισώσεις, για παράδειγμα τις 1,2 παίρνουμε

$$\Sigma_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

Τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

Βασικές παρατηρήσεις

Έχουμε το σύστημα

$$\Sigma_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

Αν πολ/σουμε μία εξίσωση με ένα αριθμό λ και την προσθέσουμε σε μία άλλη, για παράδειγμα αν πολ/σουμε την εξίσωση 1 με λ και την προσθέσουμε στην 2 παίρνουμε

$$\Sigma_3 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ (\lambda a_{1,1} + a_{2,1})x_1 & + & \cdots & + & (\lambda a_{1,n} + a_{2,n})x_n & = & \lambda b_1 + b_2 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

Τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις (*Ισοδύναμα* συστήματα).

Βασικές παρατηρήσεις

Ένα $n \times n$ σύστημα (τετραγωνικό) που έχει τη μορφή

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n-1}x_{n-1} & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right\}$$

με $a_{i,i} \neq 0$ για $i = 1, \ldots, n$, μπορούμε να το λύσουμε εύκολα:

1. Υπολογίζουμε το x_n από την τελευταία εξίσωση.
2. Αντικαθιστούμε την τιμή του x_n στην εξίσωση $n-1$ και υπολογίζουμε το x_{n-1}.
3. Συνεχίζουμε "προς τα πάνω": με δεδομένα τα $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_i$, υπολογίζουμε το x_{i-1}.
4. Βρίσκουμε *μοναδική λύση για τα δεδομένα* $b_1, \ldots, b_n$.

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται *ανάδρομη αντικατάσταση*.

Ανάδρομη αντικατάσταση

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right\}$$

- Υπολογίζουμε $x_3 = 2$ από την 3η εξίσωση.
- Αντικαθιστούμε το x_2 στη 2η εξίσωση και έχουμε $x_2 + 2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -1$.
- Αντικαθιστούμε τα x_2, x_3 στην 1η εξίσωση και έχουμε $x_1 - 1 + 2 = -1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -2$.
- Λύση $(x_1, x_2, x_3) = (-2, -1, 2)$.

Πίνακας και επαυξημένος πίνακας

Στο σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

αντιστοιχεί ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$ ονομάζεται ο πίνακας του συστήματος.

Ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$ ονομάζεται ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

Πίνακας και επαυξημένος πίνακας

Ο πίνακας του συστήματος

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right\}$$

είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ενώ ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Η βασική ιδέα

- Στόχος μας είναι να βρούμε ένα ισοδύναμο σύστημα του οποίου πίνακας είναι *κλιμακωτός*.
    - Αν το πρώτο (από αριστερά) μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής i βρίσκεται στη στήλη j, τότε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο στη γραμμή $i' > i$ και στη στήλη $j' > j$.
    - Το πρώτο (από αριστερά) μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής ονομάζεται *οδηγός*.
- Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν εμφανίζονται τελευταίες.

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{είναι κλιμακωτός.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{δεν είναι κλιμακωτός.}$$

Απαλοιφή Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \end{array}\right\} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & -2x_3 & = & -4 \end{array}\right\}$$

Υπολογίζουμε το x_3 από την τελευταία εξίσωση

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση και υπολογίζουμε το x_2

$$\left\{\begin{array}{ccccccr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Αντικαθιστούμε τα x_3, x_2 στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε το x_1

$$\left\{\begin{array}{ccccr} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *ανάδρομη αντικατάσταση*.

Απαλοιφή Gauss σε πίνακα

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{crr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

Που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & -2x_3 & = & -4 \end{array} \right\}$$

Συνεχίζουμε με ανάδρομη αντικατάσταση όπως πριν.

Απαλοιφή Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \leftarrow r_4 - r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Όλες οι στήλες έχουν οδηγό. Μοναδική λύση (βρείτε τη!)

Απαλοιφή Gauss

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + r_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_2 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -10 \end{array}\right)$$

- *Δεσμευμένες μεταβλητές*: οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλη με οδηγό.
- *Ελεύθερες μεταβλητές*: οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλη χωρίς οδηγό.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ & & & & & & -7x_4 & = & -10 \end{array}\right\}$$

Ανάδρομη αντικατάσταση

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ & & & & & & -7x_4 & = & -10 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} x_1 & & & + & 2x_4 & = & 2 + x_2 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ & & & & -7x_4 & = & -10 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x_1 & & & & = & 4/7 + x_2 \\ & & x_3 & & = & 5/7 \\ & & & x_4 & = & 10/7 \end{array}\right\}$$

Λύσεις: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{4}{7} + x_2, x_2, \frac{5}{7}, \frac{10}{7}), \quad x_2 \in \mathbb{R}$.

Απαλοιφή Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + r_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - r_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Το σύστημα είναι αδύνατο! Η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$