
Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Θεόδουλος Γαρεφαλάκης Γιώργος Καπετανάκης

Χειμερινό εξάμηνο 2020-21

Τι είναι γραμμική εξίσωση;

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

- x_1, \dots, x_n : μεταβλητές
- a_1, \dots, a_n : συντελεστές (προς το παρόν στοιχεία του \mathbb{R})
- b : δεξί μέλος (προς το παρόν στοιχείο του \mathbb{R})

Την εξίσωση αυτή θα τη γράφουμε και

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b.$$

Παραδείγματα:

- $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1$
- $-x_1 + x_2 + 2x_4 = 0,$
- $2x_1 - x_2 = -2.$

Τι είναι γραμμικό σύστημα;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad m \times n \text{ σύστημα}$$

Παράδειγματα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\} \quad 2 \times 2 \text{ σύστημα}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{array} \right\} \quad 3 \times 3 \text{ σύστημα}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad 2 \times 3 \text{ σύστημα}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{array} \right\} \quad 4 \times 3 \text{ σύστημα}$$

Τι θα μελετήσουμε;

- Ένα μεθοδικό τρόπο να λύνουμε γραμμικά συστήματα.
 - Έχει το σύστημα λύσεις;

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 = 2 \\ x_1 & - & x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ έχει λύση } (x_1, x_2) = (1, 1).$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 = 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ δεν έχει λύση!}$$

- Εάν έχει λύσεις, να τις περιγράψουμε όλες.

$$x_1 - x_2 = 1 \quad \text{έχει τις λύσεις } (x_1, x_2) = (1 + t, t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

- Θα μελετήσουμε ποιοτικά τα συστήματα.
 - Πότε είναι ένα σύστημα αδύνατο;
 - Πότε έχει μοναδική λύση;
 - Πότε έχει περισσότερες λύσεις;