ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 12

13/5/2020

Άσκηση 12.1 Θεωρήστε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

α΄. Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα R και διαγώνιο πίνακα D τέτοιο ώστε $AR = RD$.

β΄. Υπολογίστε τον πίνακα A^k για κάθε θετικό ακέραιο k.

γ΄. Λύστε το σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k + 5y_k \\ y_{k+1} &= -x_k - 2y_k \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda - 3$. Ιδιοτιμές $\lambda = 3, -1$.
Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$R = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^k &= RD^kR^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5(3^k) + (-1)^k & -5(3^k - (-1)^k) \\ 3^k - (-1)^k & 3^k - 5(-1)^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5(3^k - (-1)^k) \\ 3^k - 5(-1)^k \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 12.2 Να βρεθούν οι οριακές τιμές των $y_k,\ z_k,\ k \to \infty$ εαν

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 0,8\, y_k + 0,3\, z_k \qquad & y_0 &= 0 \\ z_{k+1} &= 0,2\, y_k + 0,7\, z_k \qquad & z_0 &= 5 \end{aligned}$$

Βρείτε γενικούς τύπους για $y_k,\ z_k$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εξετάζουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$. Ιδιοτιμές $\lambda = 1,\ 0,5$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(3,\ 2)$ και $(-1,\ 1)$.
Θέτουμε $R = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$. Τότε

$$A^k = RD^kR^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3 \cdot 2^{-k}) \\ 2 + 3 \cdot 2^{-k} \end{bmatrix}.$$

Άρα $y_k \to 3$ και $z_k \to 2$.

Άσκηση 12.3 Με δεδομένο οτι

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

α΄. Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα R και διαγώνιο πίνακα D τέτοιο ώστε $AR = RD$.

β΄. Δίδεται το σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - 2y_k - 6z_k \\ y_{k+1} &= 2x_k + 5y_k + 6z_k \\ z_{k+1} &= -2x_k - 2y_k - 3z_k\,, \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0 = 1$ και $z_0 = 0$.
Εκφράστε το διάνυσμα αρχικών συνθηκών $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $v_1,\ v_2,\ v_3$, και λύστε το σύστημα εξισώσεων διαφορών.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$Av_1 = -3v_1$, $Av_2 = 3v_2$, $Av_3 = 3v_3$.
$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

και βρίσκουμε $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(2v_1 - 2v_2 + 5v_3)$. Άρα η λύση του συστήματος εξισώσεων διαφορών είναι $A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(2(-3)^k v_1 - 2(3^k)v_2 + 5(3^k)v_3)$.

Άσκηση 12.4 Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων διαφορών $v_{k+1} = Av_k$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad v_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

Είναι αυτό το σύστημα μία διαδικασία Markov; Είναι μία *ομαλή* διαδικασία Markov;
Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα R και διαγώνιο πίνακα D τέτοιους ώστε $AR = RD$.
Υποθέστε οτι το σύστημα παριστάνει την κατανομή ενός πληθυσμού 6000 ατόμων, κατανεμημένων σε 3 καταστάσεις, με x_k τον αριθμό των ατόμων στην κατάσταση 1, y_k στην κατάσταση 2 και z_k στην κατάσταση 3. Αρχικά 1000 άτομα βρίσκονται στην κατάσταση 1, 2000 στην κατάσταση 2 και 3000 στην κατάσταση 3. Βρείτε την μακροπρόθεσμη κατανομή του πληθυσμού και τον αριθμό των ατόμων που τελικά θα βρίσκονται σε κάθε μία κατάσταση. (Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε τον πίνακα R^{-1}.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Είναι Μαρκοβιανή διαδικασία, αφού όλα τα στοιχεία του πίνακα A είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 1.
Είναι κανονική διαδικασία, αφού A^2 έχει όλο γνήσια θετικά στοιχεία. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, και τα τοποθετούμε στους πίνακες R και D:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα $v_0 = (1000, 2000, 3000)$ μπορούμε να το εκφράσουμε ως προς τη βάση που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, με διάνυσμα συντεταγμένων έστω $u_0 = (a_0, b_0, c_0)$. Τότε $v_0 = Ru_0$ και

$$A^k v_0 = RD^k R^{-1} v_0 = RD^k R^{-1}(Ru_0) = RD^k u_0 .$$

Αλλά D^k τείνει στο διαγώνιο πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Η μακροπρόθεσμη κατανομή του πληθυσμού είναι το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1 πολλαπλασιασμένο επί a_0. Σε κάθε κατάσταση τελικά θα βρίσκονται 2000 άτομα.

Άσκηση 12.5 Για ποιες τιμές των α, β είναι η παρακάτω εξίσωση μια διαδικασία Markov;

$$u_{k+1} = Au_k = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{bmatrix} u_k, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε το $u_k = S\Lambda^k S^{-1} u_0$. Για ποιές τιμές των α, β το όριο $u_k,\ k \to \infty$ είναι πεπερασμένο, και ποιό είναι αυτό το όριο.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Είναι Μαρκοβιανή διαδικασία όταν $0 \le \alpha \le 1$ και $0 \le \beta \le 1$.
Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι 1 και $\alpha - \beta$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(\beta/(1-\alpha),\ 1)$ και $(1,\ -1)$ και

$$u_k = \begin{bmatrix} \frac{2\beta}{\beta-\alpha+1} - \frac{1-\alpha-\beta}{\beta-\alpha+1}(\alpha-\beta)^k \\ \frac{2(1-\alpha)}{\beta-\alpha+1} - \frac{1-\alpha-\beta}{\beta-\alpha+1}(\alpha-\beta)^k \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 12.6 Η γραφική παράσταση της $u = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Προσεγγίζουμε την u με τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (I + A)u_n \\ u_{n+1} &= (I - A)^{-1}u_n \\ u_{n+1} &= (I - \frac{1}{2}A)^{-1}(I + \frac{1}{2}A)u_n \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Βρείτε τις ιδιοτιμές των $I + A,\ (I - A)^{-1},\ (I - \frac{1}{2}A)^{-1}(I + \frac{1}{2}A)$. Ποιά είναι η γραφική παράσταση της u_n για κάθε εξίσωση διαφορών; Για ποιά εξίσωση διαφορών η λύση u_n είναι ο κύκλος;

Άσκηση 12.7 Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 12.1, για να δείξετε οτι ο αριθμός $3^k - (-1)^k$ είναι πολλαπλάσιο του 4, για κάθε θετικό ακέραιο k.