

MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 11

5/5/2020

Άσκηση 11.1 Εξετάστε ποιό από τους παρακάτω πίνακες είναι μοναδιαίοι ή ερμιτιανοί.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2-i \\ 2+i & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

A είναι ερμιτιανός. C είναι μοναδιαίος. B είναι και τα δύο.

Άσκηση 11.2 Για $n \times n$ μιγαδικούς πίνακες A και B , δείξτε ότι

α'. $\bar{A}^T = \overline{A^T}$

β'. $\det(A^*) = \det(\bar{A}) = \overline{\det A}$

γ'. $(A^*)^* = A$

δ'. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

ε'. $(A + B)^* = A^* + B^*$

ς'. $(AB)^* = B^* A^*$

ζ'. Εάν A είναι αντιστρέψιμος, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Άσκηση 11.3 Για $n \times n$ μοναδιαίους πίνακες A και B , δείξτε ότι

α'. \bar{A} , A^T και A^{-1} είναι μοναδιαίοι

β'. Εάν λ είναι ιδιοτιμή του A , $|\lambda| = 1$ και $\frac{1}{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A .

γ'. $\det A = 1$

δ'. Οι πίνακες AB και AB^{-1} είναι μοναδιαίοι

Απάντηση - Υπόδειξη.

β'. Εάν $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0$, τότε $\det(A - \lambda AA^*) = 0$, δηλαδή $(\det A)(\det(\mathbf{I} - \lambda A^*)) = 0$.
Αλλά $\det A \neq 0$, άρα $\det(A^* - \frac{1}{\lambda} \mathbf{I}) = 0$.

Άσκηση 11.4 Βρείτε μοναδιαίο πίνακα με πρώτη γραμμή $\left[\frac{1}{\sqrt{10}} \ 0 \ \frac{3}{\sqrt{10}} \right]$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Για παράδειγμα, $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 11.5 Βρείτε μοναδιαίους πίνακες που διαγωνιοποιούν τους

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 - 3i \\ 3 + 3i & 5 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Για τον A , $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Για τον B , $U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Για τον C , $U = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{6}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

Άσκηση 11.6 Εκφράστε τους ακόλουθους πίνακες ως γραμμικούς συνδυασμούς πινάκων προβολών στους ιδιόχωρους.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$A = 0 + 1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$B = 1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$C = 5 \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11.7 Εάν A είναι μιγαδικός $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^* = -A$, δείξτε ότι

α'. Κάθε ιδιοτιμή του A είναι της μορφής $i\mu$, για $\mu \in \mathbb{R}$.

β'. Ο πίνακας $A + \mathbf{I}_n$ είναι αντιστρέψιμος.

γ'. Ο πίνακας $(\mathbf{I}_n - A)(\mathbf{I}_n + A)^{-1}$ είναι μοναδιαίος.

Άσκηση 11.8 Αποδείξτε ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του \mathbb{C}^2 αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του $\begin{bmatrix} 1 & i \\ a & 1 \end{bmatrix}$ εάν και μόνον εάν $|a| = 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο πίνακας είναι κανονικός εάν και μόνον εάν $|a| = 1$.

Άσκηση 11.9 Εξετάστε ποιό από τις παρακάτω κατηγορίες πινάκων είναι κανονικοί.

- α'. Οι ερμιτιανοί πίνακες, $A^* = A$.
- β'. Οι μοναδιαίοι πίνακες, $A^*A = \mathbf{I}$
- γ'. Οι αντι-ερμιτιανοί πίνακες, $A^* = -A$.
- δ'. Οι συμμετρικοί μιγαδικοί πίνακες, $A = A^T$.
- ε'. Οι αντισυμμετρικοί μιγαδικοί πίνακες, $A = -A^T$.
- ς'. Πίνακες της μορφής $A = BB^*$.
- ζ'. Πίνακες της μορφής $A = B + C$, για B και C ερμιτιανούς.
- η'. Πίνακες της μορφής $A = BC$, για B και C μοναδιαίους.
- θ'. Πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση $A^*A = -\mathbf{I}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

β'. Αφού $A^* = A^{-1}$, $A^*A = AA^* = \mathbf{I}$. Ναι. δ'. Όχι. ε'. Όχι.

Άσκηση 11.10 Δείξτε ότι εάν A είναι ερμιτιανός $n \times n$, $x \in \mathbb{C}^n$ και υπάρχει k για το οποίο $A^k x = 0$, τότε $Ax = 0$.