ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 10

28/4/2020

Άσκηση 10.1 Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα $\langle u, v\rangle$, $||u||$, $||v||$, την απόσταση $d(u, v) = ||u-v||$ μεταξύ των σημείων που έχουν διάνυσμα θέσης u και v, και το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των u και v, για τα διανύσματα:

α΄. $u = (3, -2, 1)$ και $v = (1, -1, 1)$.

β΄. $u = (1, 0, -2)$, $\quad v = (2, 1, 1)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. $\langle u, v\rangle = 6$, $||u|| = \sqrt{14}$, $||v|| = \sqrt{3}$, $d(u, v) = \sqrt{5}$, $\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||}$ όπου φ η γωνία μεταξύ των u και v.
β΄. $\langle u, v\rangle = 0$, $||u|| = \sqrt{5}$, $||v|| = \sqrt{6}$, $d(u, v) = \sqrt{11}$, τα u, v εδώ είνα ορθογώνια.

Άσκηση 10.2 Θεωρούμε το μιγαδικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα $\langle u, v\rangle$, $||u||$, $||v||$ και την απόσταση $d(u, v) = ||u - v||$, για τα διανύσματα:

α΄. $u = (2 - \mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i})$, $\quad v = (3 - 2\mathrm{i}, 2 + \mathrm{i})$.

β΄. $u = (2 - 3\mathrm{i}, -2 + 3\mathrm{i})$, $\quad v = (1, 1)$.

Σε ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο ορίζεται η έννοια της ορθογωνιότητας, αλλά δεν ορίζεται η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. $\langle u, v\rangle = (2 - \mathrm{i}) \cdot (3 + 2i) + (3 + 2\mathrm{i}) \cdot (2 - \mathrm{i}) = 16 + 2\mathrm{i}$, $\quad ||u|| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = ||v||$ και $d(u, v) = 2$.
β΄. $\langle u, v\rangle = (2-3\mathrm{i})\cdot 1+(-2+3\mathrm{i})\cdot 1 = 0$, $||u|| = \sqrt{26}$, $||v|| = \sqrt{2}$ και $d(u, v) = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Άσκηση 10.3 Θεωρούμε διανύσματα $v = (v_1, v_2)$ και $w = (w_1, w_2)$ στο $\mathbb{R}^2$.

α΄. Δείξτε οτι η συνάρτηση $\langle v, w\rangle = 4v_1w_1 + 9v_2w_2$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$.

β΄. Δείξτε οτι η συνάρτηση $\langle v, w\rangle = 2v_1w_1 - v_2w_2$ δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για το (α΄) ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, δηλ. :
1) $\langle \lambda v + u,\, w\rangle = \lambda\langle v,\, w\rangle + \langle u,\, w\rangle$ το οποίο ισχύει αφού
$\langle \lambda v + u,\, w\rangle = 4(\lambda v_1 + u_1)w_1 + 9(\lambda v_2 + u_2)w_2 = \lambda(4v_1w_1 + 9v_2w_2) + 4u_1w_1 + 9u_2w_2 = \lambda\langle v,\, w\rangle + \langle u,\, w\rangle$.
2) $\langle w,\, v\rangle = 4w_1v_1 + 9w_2v_2 = \langle v,\, w\rangle$. (Παρατηρήστε ότι δεν μπαίνει συζυγές γιατί είμαστε στο $\mathbb{R}$)
3) $\langle v,\, v\rangle = 4v_1^2 + 9v_2^2 \geq 0$, και $\langle v,\, v\rangle = 0$ αν και μόνον αν $v = 0$.
Για το (β΄) έχουμε οτι δεν είναι εσωτερικό γινόμενο αφού για παράδειγμα το διάνυσμα $v = (0, 1)$ δίνει $\langle v,\, v\rangle = -1 < 0$.

Άσκηση 10.4 Θεωρούμε το χώρο $C[0,\, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,\, 1]$, με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,\, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

α΄. Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 2$.

β΄. Δείξτε οτι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - 3$ είναι ορθογώνιες.

γ΄. Βρείτε μία συνάρτηση ορθογώνια προς την $f(x) = 6x + 12$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄) $\langle f,\, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 (2x + 1)(3x - 2)\, dx = -0.5$
β΄) Βλέπουμε οτι $\langle f,\, g\rangle = \int_0^1 x^2(4x - 3)dx = 0$.
γ΄) Πάρτε για παράδειγμα την $g(x) = 1 - 15/8x$.

Άσκηση 10.5 Έστω $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy–Schwarz για να δείξετε οτι

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right).$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εφαρμόστε το Θεώρημα Cauchy–Schwarz για τα διανύσματα $v = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ και $w = (1, 1/2, \cdots, 1/n)$.

Άσκηση 10.6 Εξετάστε εάν οι ακόλουθες συναρτήσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathcal{M}(2,\, \mathbb{R})$ των 2×2 πραγματικών πινάκων:

α΄. $\langle A,\, B\rangle = \det AB$,

β΄. $\langle A,\, B\rangle = \operatorname{tr} AB$,

γ΄. $\langle A,\, B\rangle = \operatorname{tr} B^T A$.

Άσκηση 10.7 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, και τον υπόχωρο X που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1,\, 1,\, 0,\, 0)$ και $u_2 = (0,\, 1,\, -1,\, 1)$.

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $X^\perp$, και συμπληρώστε την σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$X^\perp$ είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Μία βάση του $X^\perp$ είναι η $\{(-1,\, 1,\, 1,\, 0),\, (1,\, -1,\, 0,\, 1)\}$, από την οποία, με ορθοκανονικοποίηση Gram – Schmidt παίρνουμε μία ορθοκανονική βάση $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\, 1,\, 1,\, 0),\, \frac{1}{\sqrt{15}}(1,\, -1,\, 2,\, 3)\}$. Για να την επεκτείνουμε σε βάση του $\mathbb{R}^4$, χρησιμοποιούμε τις γραμμές του πίνακα A. Μετά από ορθοκανονικοποίηση παίρνουμε την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\, 1,\, 1,\, 0),\, \frac{1}{\sqrt{15}}(1,\, -1,\, 2,\, 3),\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, 1,\, 0,\, 0),\, \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,\, 1,\, -2,\, 2) \right\}.$$

Άσκηση 10.8 Βρείτε μία ορθοκανονική βάση για τον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$,

$$V = \{(x,\, y,\, z) : 5x - y + 2z = 0\}.$$

Επεκτείνατε τη βάση που βρήκατε σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Μία βάση του V είναι η $\{(1,\, 5,\, 0),\, (-2,\, 0,\, 5)\}$. Από αυτήν βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση $\{\frac{1}{\sqrt{26}}(1,\, 5,\, 0),\, \frac{1}{\sqrt{195}}(-5,\, 1,\, 13)\}$. Το διάνυσμα $(5,\, -1,\, 2)$ είναι ορθογώνιο στο V, και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να επεκτείνουμε την ορθοκανονική βάση του V σε βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 10.9 Έστω 2×2 πραγματικός πίνακας A. Δείξτε οτι η απεικόνιση

$$\langle x,\, y\rangle = x^T A y = [x_1,\, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$ εάν και μόνον εάν $A^T = A$, $\det A > 0$ και $\operatorname{tr} A > 0$, (δηλαδή εάν $b = c$, $ad - b^2 > 0$ και $a > 0$).

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για κάθε πίνακα A η απεικόνιση $x \mapsto x^T A y$ είναι γραμμική.
Για τη συμμετρική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε $\langle y,\, x\rangle = y^t A x = (x^T A^T y)^T = x^T A^T y$. Επομένως $x^T A^T y = x^T A y = \langle x,\, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν $A = A^T$. (Δείτε ότι δεν χρειάζεται να πάρουμε $\overline{\langle y,\, x\rangle}$ γιατί είμαστε στο $\mathbb{R}$.) Επομένως $b = c$. Μένει να δούμε τι ιδιότητες πρέπει να ικανοποιεί ο A για να έχουμε $\langle x,\, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι $\langle x,\, x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$. Για $x = (x_1, 0)$ έχουμε $\langle x,\, x\rangle = ax_1^2$ και άρα $a > 0$. Ανάλογα για $x = (0, x_2)$ έχουμε $d > 0$. Επίσης αν $0 \neq x_2$ έχουμε $\langle x,\, x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = x_2^2(a(x_1/x_2)^2 + 2b(x_1/x_2) + d)$. Επομένως έχουμε $\langle x,\, x\rangle > 0$ αν και μονο αν το παραπάνω τριώνυμο είναι πάντα θετικό για κάθε $x \neq 0$. Αυτό συμβαίνει αν

και μόνον αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική δηλαδή αν και μόνο αν $4b^2 - 4ad < 0$ από όπου προκύπτει και το ζητούμενο.

Άσκηση 10.10 Θεωρήστε θετική συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε

$$\langle p, q\rangle_f = \int_0^1 f(t)p(t)q(t)dt\,,$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

Εάν $f(x) = x + 1$, βρείτε ορθοκανονική βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 1, με το εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle_f$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ξεκινάμε με την κανονική βάση του $\mathbb{R}[x]_1$, $p_0 = 1$, $p_1 = x$.
$\langle p_0, p_0\rangle_f = \int_0^1 (t + 1)\, dt = \frac{3}{2}$.
$\langle p_0, p_1\rangle_f = \int_0^1 (t + 1)t\, dt = \frac{5}{6}$.
$\langle p_1, p_1\rangle_f = \int_0^1 (t + 1)t^2 dt = \frac{7}{12}$.
$r_0 = p_0$. $r_1 = p_1 - \frac{\langle r_0, p_1\rangle_f}{\langle r_0, r_0\rangle_f} r_0 = x - \frac{5}{9}$.
$\langle r_1, r_1\rangle_f = \langle p_1, p_1\rangle_f - \frac{10}{9}\langle p_1, p_0\rangle_f + \frac{25}{81}\langle p_0, p_0\rangle_f = \frac{13}{108}$.
Άρα η ορθοκανονική βάση είναι

$$q_0(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \qquad q_1 = \sqrt{\frac{108}{13}}\left(x - \frac{5}{9}\right)\,.$$

Άσκηση 10.11 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$, με εσωτερικό γινόμενο, και δύο διαφορετικά διανύσματα a, $b \in V$. Αποδείξτε οτι εάν $x \in V$ και $||x-a||+||x-b|| = ||a - b||$, τότε $x = \lambda a + \mu b$, με λ, $\mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda + \mu = 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρήστε γραμμικό υπόχωρο W του V, διάστασης 2, που περιέχει τα διανύσματα $u = x - a$ και $v = x - b$. Εκφράστε το u ως γραμμικό συνδυασμό $sv + tw$ για $0 \neq w \in W$ με $\langle v, w\rangle = 0$, και δείξτε οτι $t = 0$.