ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 9

7/4/2020

Άσκηση 9.1 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

α΄. Δείξτε οτι $A^3 - aA^2 + 2A - I = 0$.

β΄. Δείξτε οτι ο A είναι αντιστρέψιμος και συμπεράνετε από το α΄ τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}.

γ΄. Υπολογίστε τον πίνακα $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. Εφαρμόστε το Θεώρημα Cayley–Hamilton.
β΄. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μη μηδενικό σταθερό όρο, άρα το 0 δεν είναι ιδιοτιμή και A είναι αντιστρέψιμος. $A^{-1} = A^2 - aA + 2I$.
γ΄. $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I = A$.

Άσκηση 9.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε ένα πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού ίσου ή μικρότερου από 1, τέτοιο ώστε $p(A) = 3A^5 + 5A^4 + A$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Μπορείτε να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x)$ με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $x^2 - 2x + 5$. Εναλλακτικά, μπορείτε να αντικαταστήσετε επανειλημμένα το x^2 με $2x - 5$ στο $p(x)$, μέχρι να καταλήξετε σε πολυώνυμο βαθμού 1.
Τελικά βρίσκετε $p(A) = -116A + 205I$.

Άσκηση 9.3 Αν A είναι 3×3 τετραγωνικός πίνακας, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = -x^3 + x$ δείξτε οτι

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{εάν } n \text{ περιττός} \\ A^2, & \text{εάν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Από το Θεώρημα Cayley–Hamilton, $A^3 = A$. (Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $A^2 = I$, αφού ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.) Επαγωγικά έχουμε $A^{2k+1} = A$, $A^{2k} = A^2$.

Άσκηση 9.4 Δείξτε οτι εάν A είναι τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$, τότε ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Συμπεράνετε οτι δεν υπάρχει 3×3 πραγματικός πίνακας ο οποίος να ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Παρατηρήστε οτι εάν x είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ του A, τότε $A^2x = \lambda^2 x$, και $A^2 x = -x$.

Άσκηση 9.5 Δείξτε οτι $||x||_\infty = \max\{|x_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\}$, για $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Απάντηση - Υπόδειξη.
N1. $||x||_\infty = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow x = 0$
N2. Αν $a \in \mathbb{R}$ τότε $||a \cdot x||_\infty = \max\{|ax_i| : i = 1, \ldots, n\} = \max\{|a||x_i| : i = 1, \ldots, n\} = |a| \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\} = |a| \, ||x||_\infty$
N3. Για την τριγωνική ανισότητα παρατηρούμε οτι αν $|x_0+y_0| = \max\{|x_i+y_i| : i = 1, \ldots, n\}$ τότε $|x_0 + y_0| \leq |x_0| + |y_0| \leq \max\{|x_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\} + \max\{|y_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\} = ||x||_\infty + ||y||_\infty$. Άρα έχουμε το ζητούμενο: $||x + y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$.

Άσκηση 9.6 Δείξτε οτι $||f||_\infty = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a, b]\}$, για f συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Άσκηση 9.7 Σχεδιάστε τη μοναδιαία σφαίρα στους χώρους $\mathbb{R}^2$ με τις νόρμες ℓ^1, ℓ^2 και ℓ^∞.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σημείο $x \in \mathbb{R}^2$ ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα με τη νόρμα ℓ^∞ εάν η μεγαλύτερη από τις απόλυτες τιμές των συντεταγμένων του x είναι ίση με 1.
Το σημείο $x \in \mathbb{R}^2$ ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα με τη νόρμα ℓ^1 εάν το άθροισμα των απολύτων τιμών των συντεταγμένων του x είναι ίσο με 1.

Άσκηση 9.8 Δείξτε οτι $||x|| = \frac{1}{3}(|x_1| + |x_2|) + \frac{2}{3}\max\{|x_1|, |x_2|\}$ ορίζει μία νόρμα στο $\mathbb{R}^2$. Σχεδιάστε τη μοναδιαία σφαίρα ως προς αυτή τη νόρμα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Τα N1 και N2 προκύπτουν εύκολα από τα αντίστοιχα για τις νόρμες ℓ^1 και ℓ^∞.
Για το N3, χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής: $|a+b| \leq |a|+|b|$ και $\max\{|a|+|b|, |c|+|d|\} \leq \max\{|a|, |c|\} + \max\{|b|+|d|\}$ για να δείξετε οτι

$$\frac{1}{3}(|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|) + \frac{2}{3}\max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq \\ \frac{1}{3}(|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|) + \frac{2}{3}(\max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1, |y_2|\}) \, .$$

Για να βρειτε τη σφαίρα, κοιτάξτε αρχικά στο ογδοημόριο του επιπέδου που αποτελείται από τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν $x > 0$, $y > 0$ και $x > y$. Τα σημεία της μοναδιαίας σφαίρας σε αυτό το υποσύνολο είναι τα $y = 3 - 3x$. Συνολικά η μοναδιαία σφαίρα είναι ένα οκτάγωνο, με πλευρές σε παρόμοιες ευθείες με κλήση +3, -3, +1/3 ή -1/3.

Άσκηση 9.9 Θεωρούμε τους παρακάτω τριδιαγώνιους $n \times n$ πίνακες

$$A = [1, 4, 1], \qquad B = [-1, 2, -1],$$

(δηλαδή, ο A έχει 4 στην κύρια διαγώνιο και 1 στις συνιστώσες $a_{i,i-1}$ και $a_{i,i+1}$). Βρείτε τα $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$ και $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$, $\|B\|_F$.

Υπενθύμιση: $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ και $\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\|A\|_1 = 6$, $\|A\|_\infty = 6$, $\|A\|_F = \sqrt{18n-2}$.
$\|B\|_1 = 4$, $\|B\|_\infty = 4$, $\|A\|_F = \sqrt{6n-2}$.

Άσκηση 9.10 Θεωρούμε τον πίνακα A,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους δείκτες κατάστασης $\kappa_1(A)$, $\kappa_\infty(A)$ και $\kappa_2(A)$.

Υπενθύμιση: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ και $\|A\|_2 = (\rho(A^TA))^{1/2}$ όπου $\rho(B)$ είναι το μέγιστο των μέτρων των ιδιοτιμών του B, $\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|$, για $\lambda_i(B)$ την $i-$ιδιοτιμή του B. $\rho(B)$ ονομάζεται *φασματική ακτίνα* του πίνακα B.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Οι ιδιοτιμές του A^TA είναι 9 και 1. Άρα $\|A\|_2 = 3$. Οι ιδιοτιμές του $(A^{-1})^TA$ είναι 1 και 1/9. Άρα $\|A^{-1}\|_2 = 1$. Συνεπώς $\kappa_2(A) = 3$. Υπολογίζουμε επίσης τις νόρμες $\|A\|_1$, $\|A^{-1}\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A^{-1}\|_\infty$, και βρίσκουμε $\kappa_1(A) = 3$, $\kappa_\infty(A) = 3$.

Άσκηση 9.11 Θεωρήστε το διαγώνιο $n \times n$ πίνακα $D = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{10})$. Βρείτε την ορίζουσα του και υπολογίστε επίσης τα $k_1(A)$, $k_\infty(A)$ και $k_2(A)$. Ποια είναι η συμπεριφορά των ποσοτήτων αυτών για $n \to \infty$;

Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για την χρήση αυτών ως κριτήρια καταλληλότητας για την επίλυση γραμμικών συστημάτων με πίνακες αυτής της μορφής;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Παρατηρήστε οτι για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, $Dx = \frac{1}{10}x$ και $D^{-1}x = 10x$. Συνεπώς για κάθε φυσική νόρμα πίνακα, $\|D\| = \frac{1}{10}$ και $\|D^{-1}\| = 10$.
Δείτε τις Παρατηρήσεις στο τέλος της ΠαραγρΑφου 5.4.