ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 8

31/3/2020

Άσκηση 8.1 Στο χώρο των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από 2, $\mathbb{R}_2[x]$, ορίζεται ο τελεστής $L(p(x)) = xp(1)$.

α΄. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή L ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{1,\, x,\, x^2\}$.

β΄. Βρείτε τις ιδιοτιμές του τελεστή L.

γ΄. Εξετάστε εάν ο τελεστής L είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ και $p_2(x) = x^2$, το πολυώνυμο $p(x) = ax^2 + bx + c$ γράφεται ως $p(x) = cp_0(x) + bp_1(x) + ap_2(x)$ ενώ το πολυώνυμο $L(p)(x) = p(1)x = (a+b+c)x$ γράφεται ως $L(p)(x) = (a+b+c)p_1(x)$.

Ο πίνακας του τελεστή L ως προς τη βάση $\{p_1,\, p_2,\, p_3\}$ είναι $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του L είναι 1 με πολλαπλότητα 1, και 0 με πολλαπλότητα 2. Βρίσκουμε οτι η ιδιοτιμή 0 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2 (ίση με τη διάσταση του μηδενόχωρου του πίνακα A).

Συμπεραίνουμε οτι ο τελεστής L είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 8.2 Θεωρήστε διανυσματικό χώρο V, με βάση $\{v_1,\, v_2,\, v_3\}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$,

$$L(v_1) = 4v_3\,, \quad L(v_2) = v_2\,, \quad L(v_3) = 2v_1\,.$$

α΄. Δείξτε οτι ο τελεστής L^2 είναι διαγωνιοποιήσιμος.

β΄. Εξετάστε εάν ο τελεστής L είναι διαγωνιοποιήσιμος.

γ΄. Δείξτε οτι $\sqrt{2}v_1 + 2v_3$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. Ο πίνακας του L^2 ως προς τη βάση $\{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ είναι διαγώνιος: $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

β΄. Βρείτε τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\{v_1,\, v_2,\, v_3\}$. Δείξτε οτι ο L έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, άρα είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Άσκηση 8.3 Δείξτε οτι για κάθε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$ και θετικό ακέραιο m,

α΄. εάν x είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ του L, τότε x είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ^m του L^m.

β΄. $\ker L \subseteq \ker L^m$ και $\operatorname{im} L^m \subseteq \operatorname{im} L$.

Άσκηση 8.4 Θεωρήστε έναν διαγωνιοποιήσιμο τελεστή $L : V \longrightarrow V$ και θετικό ακέραιο m.

α΄. Δείξτε οτι $\ker L = \ker L^m$ και $\operatorname{im} L = \operatorname{im} L^m$. Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα οτι αυτά δεν ισχύουν για μη διαγωνιοποιήσιμο τελεστή.

β΄. Δείξτε οτι $V = \ker L \oplus \operatorname{im} L$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. Ο πυρήνας του τελεστή είναι ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 0. Δείξτε οτι όταν ο τελεστής L είναι διαγωνιοποιήσιμος, οι ιδιόχωροι του L^m είναι οι ίδιοι με τους ιδιόχωρους του L.

Για παράδειγμα, μπορείτε να βρείτε έναν 2×2 πίνακα $A \neq 0$ τέτοιο ώστε $A^2 = 0$.

β΄. Για ένα διαγωνιοποίησιμο τελεστή, $\operatorname{im} L$ είναι το άθροισμα όλων των ιδιοχώρων για τις μή μηδενικές ιδιοτιμές.

Άσκηση 8.5 Βρείτε όλους τους αναλλοίωτους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, για τον τελεστή T_A, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο ιδιόχωρος του τελεστή για την ιδιοτιμή 1 παράγεται από τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, και ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή 2 παράγεται από το διάνυσμα $e_3 = (0, 0, 1)$. Αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι οι $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, οι ιδιόχωροι $\langle e_1, e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$, αλλά και οι υπόχωροι που προκύπτουν από υποχώρους των ιδιοχώρων, δηλαδή οι $\langle ae_1 + be_2\rangle$ για $a, b \in \mathbb{R}$, και $\langle ae_1 + be_2, e_3\rangle$ για $a, b \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8.6 Εξετάστε εάν είναι τριγωνοποιήσιμος πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 15 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Εάν είναι τριγωνοποιήσιμος, βρείτε πίνακα R τέτοιο ώστε $R^{-1}AR$ είναι άνω τριγωνικός.
(Δείτε το Παράδειγμα 3.24 στις Σημειώσεις των Διαλέξεων 15, 16.)

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων, άρα ο πίνακας είναι τριγωνοποιήσιμος. Τα ιδιοδιανύσματα είναι $(0, 0, 1)$ για την ιδιοτιμή -1 και $(8, 40, 5)$ για την ιδιοτιμή 7. Συμπληρώνουμεμία βάση με το διάνυσμα $(0, 1, 0)$. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 40 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ τριγωνοποιεί τον A. Συγκεκριμένα, $R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 7 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, όπου (a, b, c) είναι λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 40 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 8.7 Θεωρούμε διαγωνιοποιήσιμους τετραγωνικούς πίνακες A, B . Δείξτε οτι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι εάν και μονο εάν $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.
Δείξτε οτι εάν οι πίνακες δεν είναι διαγωνιοποιήσιμοι μπορεί να έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αλλά να μην είναι όμοιοι.(Βρείτε ένα 2×2 αντιπαράδειγμα.)

Άσκηση 8.8 Θεωρούμε δύο γραμμικούς τελεστές L και M στο διανυσματικό χώρο V πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, οι οποίοι αντιμετατίθενται: $L \circ M = M \circ L$. Δείξτε οτι τότε κάθε ιδιόχωρος του M είναι αναλλοίωτος από τον L. Συμπεράνετε οτι οι M και L έχουν ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε τον ιδιόχωρο U του M για την ιδιοτιμή λ. Τότε για κάθε $u \in U$, $M(L(u)) = L(M(u)) = L(\lambda u) = \lambda L(u)$, άρα $L(u) \in U$.
Επίσης $L|_U$ έχει ιδιοτιμή κ και ιδιοδιάνυσμα $w \in U$. Τότε $M(w) = \lambda w$ και $L(w) = \kappa w$, άρα w είναι κοινό ιδιοδιάνυσμα.

Άσκηση 8.9 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των ακόλουθων τελεστών στο χώρο πολυωνύμων $\mathbb{R}_3[x]$:

$$T_1(p(x)) = p(x+1)\,, \quad T_2(p(x)) = (1-x^2)p''(x) - 2xp'(x)\,,$$

όπου $p'(x)$ και $p''(x)$ είναι η πρώτη και η δεύτερη τυπική παράγωγος του πολυωνύμου $p(x)$.