

## MEM 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

### Εργαστήριο Προβλημάτων 7

24/3/2020

**Άσκηση 7.1** Δίδεται ο διανυσματικός χώρος  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$ .

α'. Βρείτε τη διάσταση και μία βάση του διανυσματικού χώρου  $V \oplus V$ .

β'. Βρείτε τη διάσταση και μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου  $V + V$  του  $\mathbb{R}^3$ .

#### Απάντηση - Υπόδειξη.

Σε αυτή την Άσκηση πρέπει να διακρίνετε μεταξύ του (εσωτερικού) ευθέως αθροίσματος δύο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου, που είναι το άθροισμα δύο υποχώρων που έχουν μηδενική τομή, και του (εξωτερικού) ευθέως αθροίσματος δύο διανυσματικών χώρων, που είναι μία δομή διανυσματικού χώρου στο καρτεσιανό γινόμενο των δύο χώρων. Αφού  $V \cap V$  δεν είναι μηδέν, το ευθύ άθροισμα στο α' δεν είναι το εσωτερικό ευθύ άθροισμα. Άρα πρόκειται για μία δομή διανυσματικού χώρου στο καρτεσιανό γινόμενο  $V \times V$ . Αυτός ο χώρος έχει διάσταση διπλάσια του  $V$ . Μία βάση δίδεται από το Λήμμα 4.7.

Στο β', θέλουμε το άθροισμα του  $V$  με τον εαυτό του, που είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από το  $V \cup V$ , δηλαδή ο ίδιος ο χώρος  $V$ .

**Άσκηση 7.2** Εάν  $X, Y, Z$  είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα  $\mathbb{K}$ , δείξτε ότι υπάρχουν ισομορφισμοί.

α'.  $X \oplus Y \cong Y \oplus X$

β'.  $X \oplus (Y \oplus Z) \cong (X \oplus Y) \oplus Z$

#### Απάντηση - Υπόδειξη.

Ελέγξτε ότι οι ακόλουθες απεικονίσεις είναι ισομορφισμοί.

α'.  $(x, y) \mapsto (y, x)$ .

β'.  $(x, (y, z)) \mapsto ((x, y), z)$ .

**Άσκηση 7.3** Ελέγξτε ότι οι κανονικές εμφυτεύσεις  $j_1 : V \rightarrow V \oplus W$  και  $j_2 : W \rightarrow V \oplus W$  και οι κανονικές προβολές  $p_1 : V \oplus W \rightarrow V$  και  $p_2 : V \oplus W \rightarrow W$  είναι γραμμικές απεικονίσεις, και ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_1 \circ j_1 = \mathbf{I}_V, \quad p_1 \circ j_2 = 0, \quad p_2 \circ j_1 = 0, \quad p_2 \circ j_2 = \mathbf{I}_W.$$

### Απάντηση - Υπόδειξη.

Ελέγξτε ότι είναι γραμμικές απεικονίσεις.

$$p_1 \circ j_1(v) = p_1((v, 0)) = v \text{ και } p_1 \circ j_2(w) = p_1((0, w)) = 0.$$

Παρόμοια για το  $p_2$ .

**Άσκηση 7.4** Στο διανυσματικό χώρο  $\mathbb{C}^4$  θεωρήστε τους υπόχωρους

$$U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 = z_2\},$$

$$V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 + z_2 - z_4 = 0, -z_1 + z_2 + z_3 = 0, z_1 + z_2 + z_3 = z_4\}.$$

α'. Δείξτε ότι  $V \subseteq U$ .

β'. Βρείτε μία βάση του χώρου πηλίκο  $U/V$ .

### Απάντηση - Υπόδειξη.

α'.  $V = \langle (1, 1, 0, 2) \rangle$ . Το διάνυσμα  $(1, 1, 0, 2)$  ανήκει στο  $U$ . Άρα  $V \subseteq U$ .

β'. Χρειάζεται να βρούμε μία βάση του  $U$  που να περιέχει μία βάση του  $V$ . Μία τέτοια βάση του  $U$  είναι η  $\{(1, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ . Άρα μία βάση του  $U/V$  είναι  $\{(0, 0, 1, 0) + V, (0, 0, 0, 1) + V\}$ .

**Άσκηση 7.5** Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}[x]$  όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, και τον υπόχωρο  $\mathbb{R}[x]_n$  των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με  $n$ . Έχει ο χώρος πηλίκο  $\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x]_n$  πεπερασμένη διάσταση;

### Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο χώρος πηλίκο είναι ο χώρος όλων των πολυωνύμων, όπου θεωρούμε ίσα με το 0 όλα τα πολυώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου με  $n$ . Τα στοιχεία του  $\mathbb{R}[x]/\mathbb{R}[x]_n$  είναι της μορφής  $a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_mx^m + \mathbb{R}[x]_n$ , για οποιοδήποτε  $m > n$ . Ο χώρος έχει άπειρη διάσταση, γιατί για κάθε  $m > n$  υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο με  $m - n$  στοιχεία. Βρείτε ένα τέτοιο σύνολο.