ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

17/3/2020

Άσκηση 6.1 Υποθέτουμε οτι ο 3×3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές 0, 3, 5 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v, w.

α'. Βρείτε μία βάση του μηδενοχώρου του A, και μία βάση του χώρου στηλών του A.

β'. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $Ax = v + w$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

γ'. Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = u$ δεν έχει λύσεις.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο μηδενόχωρος του A είναι ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή 0.
$A(v+w) = 3v+5w$. Άρα $A(\frac{1}{3}v+\frac{1}{5}w) = v+w$. Εάν προσθέσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του u έχουμε πάλι λύση.
Κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως $x = au + bv + cw$, και $Ax = 0u + 3bv + 5cw$. Άρα δεν υπάρχει x τέτοιο ώστε $Ax = u$.

Άσκηση 6.2 Διαγωνιοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες (δηλαδή βρείτε R τέτοιους ώστε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές 0, 2, και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Για τον πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 6.3 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και γράψτε έναν πίνακα R και έναν διαγώνιο πίνακα D τέτοιους ώστε $AR = RD$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ιδιοτιμές $\lambda = 1, 2, 3$. $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 6.4 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και γράψτε δύο διαφορετικούς πίνακες R που διαγωνιοποιούν τον A.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Οι στήλες του πίνακα R είναι ιδιοδιανύσματα του A που αποτελούν βάσεις για κάθε ένα ιδιόχωρο του A. Συνεπώς έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές για τον πίνακα R.

Άσκηση 6.5 Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες δεν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.6 Εάν $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, διαγωνιοποιήστε τον A και υπολογίστε τον πίνακα A^{100}.

Άσκηση 6.7 Κατασκευάστε πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού για το σύνολο $\mathbb{Z}_5 = \{0_5, 1_5, 2_5, 3_5, 4_5\}$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 5. Βρείτε το αντίθετο κάθε στοιχείου και το αντίστροφο κάθε μη μηδενικού στοιχείου.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Στο $\mathbb{Z}_5$, $-0_5 = 0_5$, $-1_5 = 4_5$, $-2_5 = 3_5$, και $2_5^{-1} = 3_5$, $4_5^{-1} = 4_5$.

Άσκηση 6.8 Στο σύνολο $\mathbb{Z}_6 = \{0_6, 1_6, 2_6, 3_6, 4_6, 5_6\}$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, μπορούμε να ορίσουμε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, με τον ίδιο τρόπο. Δείξτε οτι το στοιχείο 3_6 δεν έχει αντίστροφο.
Δείξτε οτι εάν n δεν είναι πρώτος αριθμός, στο σύνολο $\mathbb{Z}_n$ των κλάσεων υπολοίπων modulo n, υπάρχουν στοιχεία που δεν έχουν αντίστροφο.
Στα Θεμέλια των Μαθηματικών, θα δείξουμε οτι εάν p είναι πρώτος αριθμός, κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}_p$ έχει αντίστροφο.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Τα πολλαπλάσια του 3_6 με κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}_6$ είναι είτε 0_6 ή 3_6. Άρα δεν έχει αντίστροφο.

Εάν n δεν είναι πρώτος αριθμός, έστω $n = pq$ με $p, q \neq 1$. Θα δείξουμε οτι κανένα στοιχείο του $\mathbb{Z}_n$ δεν είναι αντίστροφο του p_n, δηλαδή οτι κανένα πολλαπλάσιο του p_n στο $\mathbb{Z}_n$ δεν είναι ίσο με 1_n. Πρώτα θεωρούμε τα πολλαπλάσια του p_n με τα στοιχεία r_n για $1 \leq r \leq q$. Αυτά είναι όλα διαφορετικά από το 1_n, αφού για κάθε τέτοιο r, $1 < pr < n + 1$. Έπειτα θεωρούμε πολλαπλάσιο του p_n με κάποιο στοιχείο m_n, για $q < m_n \leq n$. Τότε $m = kq + r$ για κάποιο k και κάποιο r με $0 < r < q$. Αλλά τότε $p_n m_n = k_n p_n q_n + p_n r_n = p_n r_n \neq 1_n$.

Άσκηση 6.9 Έστω $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Ορίζουμε πρόσθεση δύο στοιχείων του V και πολλαπλασιασμό στοιχείου του V με αριθμό με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) \text{ και } c(x, y) = (cx, y)\,.$$

Εξετάστε εάν ο V με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Ελέγξτε τις επιμεριστικές ιδιότητες.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε $(c_1+c_2)(x,\ y) = (c_1x+c_2x,\ y)$ που δεν είναι ίσο με $c_1(x,\ y)+c_2(x,\ y)$.

Άσκηση 6.10 Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών ακεραίων modulo 3, $(\mathbb{Z}_3)^2$, ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{Z}_3$. Αυτό το σύνολο έχει εννέα στοιχεία, της μορφής $(m_3,\ n_3)$. Βρείτε τα στοιχεία των υποσυνόλων

α′) $V = \{(m_3,\ n_3)\ :\ 2_3 m_3 + n_3 = 0\}$, β′) $W = \{(m_3,\ n_3)\ :\ m_3 + n_3 = 1_3\}$.

Εξετάστε εάν τα V, W είναι γραμμικοί υπόχωροι του $(\mathbb{Z}_3)^2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$V = \{(0,\ 0), (1,\ 1),\ (2,\ 2)\}$ (όλα με δείκτη 3) είναι γραμμικός υπόχωρος.
$W = \{(0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 2)\}$ δεν είναι γραμμικός υπόχωρος, αφού δεν περιέχει το $(0,\ 0)$.