ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 5

10/3/2020

Άσκηση 5.1 Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Εάν $B = A - 7\mathbf{I}$, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B. Πως σχετίζονται με αυτά του A;

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2).$
Για την ιδιοτιμή $\lambda = 2$, ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$, ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
$Bx = Ax - 7x$. Εάν $Ax = \lambda x$ τότε $Bx = (\lambda - 7)x$. Άρα οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda - 7$, όπου λ είναι οι ιδιοτιμές του A. Τα ιδιοδιανυσματα είναι τα ίδια.

Άσκηση 5.2 Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι οι ιδιοτιμές αλλάζουν όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη. Εξηγήστε γιατί εάν το 0 είναι μία από τις ιδιοτιμές, αυτή δεν αλλάζει.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές 2 και 3. Ο $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές 1 και 6.
Μία ιδιοτιμή είναι 0 εάν και μόνον εάν ο πίνακας είναι ιδιόμορφος, ιδιότητα που διατηρείται από πράξεις γραμμών.

Άσκηση 5.3 Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τη διάσταση του ιδιόχωρου κάθε ιδιοτιμής, και συγκρίνετε με την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Ελέγξτε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος και το γινόμενο είναι ίσο με την ορίζουσα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda$. Ιδιοτιμές $\lambda = 0,\ 1,\ 3$.
$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) - 4(2-\lambda)$. Ιδιοτιμές $\lambda = 2,\ -2$.

Άσκηση 5.4 Δείξτε οτι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\det(A^T - \lambda\mathbf{I}) = \det(A - \lambda\mathbf{I})^T$.

Άσκηση 5.5 Είναι το σύνολο v_1, v_2, v_3 γραμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του $\mathbb{C}^4$;

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2+4\mathrm{i} \\ 4+4\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Κάνουμε απαλοιφή στον πίνακα με τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 ως γραμμές, χρησιμοποιώντας μιγαδικούς πολλαπλασιαστές. Βρίσκουμε οτι η τρίτη γραμμή είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων..

Άσκηση 5.6 Βρείτε βάσεις για το μηδενόχωρο και το χώρο στηλών του μιγαδικού πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2+4\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} & 2-4\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αυτός είναι ο πίνακας που χρησιμοποιήσαμε στην Άσκηση 5.5. Μετά την απαλοιφή έχουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & \mathrm{i}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε δύο διανύσματα που αποτελούν βάση του μηδενόχωρου, και δύο διανύσματα που αποτελούν βάση του χώρου στηλών.

Άσκηση 5.7 Ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ παριστάνει περιστροφή στο επίπεδο κατά γωνία ϑ. Είναι γεωμετρικά προφανές οτι όταν η γωνία ϑ δεν είναι πολλαπλάσιο του π, δεν υπάρχει κανένα ιδιοδιάνυσμα του Q στο επίπεδο.
Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και βρείτε τα ιδιοδιανύσματα του Q στο $\mathbb{C}^2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού από μία περιστροφή κατά γωνία που δεν είναι πολλαπλάσιο του π, κάθε διάνυσμα αλλάζει διεύθυνση, είναι πράγματι προφανές οτι δεν υπάρχει κανένα ιδιοδιάνυσμα του Q στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$.
Όμως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι $\chi_Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \cos\vartheta + 1$, που έχει μιγαδικές λύσεις $\lambda = \cos\vartheta \pm \mathrm{i} \sin\vartheta$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στο $\mathbb{C}^2$, είναι $(\pm\mathrm{i},\, 1)$.

Άσκηση 5.8 Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & -6 \\ -16 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Για κάθε ιδιοτιμή βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα. Θεωρήστε τον πίνακα R με στήλες τα ιδιοδιανύσματα που βρήκατε. Υπολογίστε τον πίνακα AR. Τι παρατηρείτε; Βρείτε ένα διαγώνιο πίνακα D τέτοιον ώστε $AR = RD$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 48\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 8)$. Άρα οι ιδιοτιμές είναι 0, 6, 8, και ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων είναι $(1, -1, 2)$, $(1, 2, 2)$ και $(1, 4, 0)$. Ο A πολλαπλασιάζει κάθε στήλη του R με την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Άσκηση 5.9 Δείξτε οτι εάν A είναι 2×2 πίνακας, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\,(A)\,\lambda + \det(A)\,.$$

Άσκηση 5.10 Δείξτε οτι εάν A είναι πραγματικός πίνακας, και $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα x, τότε $\bar{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα $\bar{x}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν $(A - \lambda\mathbf{I})x = 0$, τότε $(\bar{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\bar{x} = 0$. Όταν A είναι πραγματικός πίνακας, τότε $\bar{A} = A$.