ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 3

25/2/2020

Άσκηση 3.1 Βρείτε ένα διάνυσμα x ορθογώνιο στο χώρο γραμμών του A, ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο στηλών, και ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο μηδενοχώρο του πίνακα A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το διάνυσμα x πρέπει να ανήκει στο μηδενόχωρο του A. Σε ποιόν υπόχωρο ανήκουν τα άλλα διανύσματα.

Άσκηση 3.2 Βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι ορθογώνια στο $(1, 1, 1)$ και στο $(1, -1, 0)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ο μηδενόχωρος του A αποτελείται από όλα τα διανύσματα που είναι ορθογώνια στο $(1, 1, 1)$ και στο $(1, -1, 0)$.

Άσκηση 3.3 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος γραμμών περιέχει το $(1, 2, 1)$ και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1, -2, 1)$, ή δείξτε οτι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού τα δύο διανύσματα δεν είναι ορθογώνια, δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Άσκηση 3.4 Κατασκευάστε μία ομογενή εξίσωση σε τρείς αγνώστους, της οποίας οι λύσεις είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1, 1, 2)$ και $(1, 2, 3)$. Αυτό είναι το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης, αλλά τα δύο προβλήματα είναι ουσιαστικά τα ίδια.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η εξίσωση θα είναι της μορφής $Ax = 0$, με τα δύο διανύσματα ορθογώνια στις γραμμές του A. Για παράδειγμα, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3.5 Βρείτε την προβολή του διανύσματος $(7, 4)$ πάνω στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 2)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο πίνακας προβολής στο διάνυσμα v είναι ο $P = \frac{1}{v^T v} v v^T$. Για $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, και το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3.6 Βρείτε τον πίνακα προβολής που αντιστοιχεί στην προβολή των διανυσμάτων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ πάνω στην ευθεία $3x - 2y = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Είναι ο πίνακας προβολής στο διάνυσμα $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3.7 Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, και υπολογίστε την προβολή $p = A\hat{x}$, εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e = b - p$ είναι ορθογώνιο στις στήλες του A.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{x}$ είναι η λύση της εξίσωσης $A^T A\hat{x} = A^T b$. Βρίσκουμε $\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ και υπολογίζουμε το p. Για να είναι το σφάλμα $e = b - p$ ορθογώνιο στις στήλες του A, πρέπει να ισχύει $A^T e = 0$.

Άσκηση 3.8 Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$(1, 2, 0, 3), \quad (2, 1, 1, 2) \quad (-1, 4, -2, 5)$$

α΄. Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V.

β΄. Γράψτε το διάνυσμα $x = (-4, 15, 7, 8)$ ως άθροισμα $x = v + w$, όπου $v \in V$ και $w \in V^\perp$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού V είναι ο χώρος γραμμών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, το ορθογώνιο συμπλήρωμα θα είναι ο μηδενόχωρος του A. Κάνουμε απαλοιφή και βρίσκουμε οτι μία βάση του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ είναι η $\{(1, 2, 0, 3), (2, 1, 1, 2)\}$ και μία βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A)$ είναι η $\{(-2, 1, 3, 0), (-1, -4, 0, 3)\}$.

Ζητάμε $v \in V = \mathcal{R}(A^T)$ και $w \in V^\perp = \mathcal{N}(A)$ τέτοια ώστε $v + w = x$. Λύνουμε το σύστημα

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 15 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

για να βρούμε $v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $w = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3.9 Γνωρίζομε οτι οι τιμές μιας ποσότητας y που παριστάνει ένα φυσικό μέγεθος υπόκεινται σε γραμμική μεταβολή ως προς τις τιμές μιας συνεχούς μεταβλητής x. Σε ένα πείραμα υπολογισμού της εξίσωσης που παριστά την εν λόγω μεταβολή, μετρήθηκαν τα ζεύγη τιμών: $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε τους συντελεστές a και b της εξίσωσης $y = ax + b$ που παριστά το νόμο μεταβολής της ποσότητας y. Βρείτε το διάνυσμα λάθους που προκύπτει από τη λύση ελαχίστων τετραγώνων και δείξτε οτι αυτό είναι ορθογώνιο στο χώρο των στηλών του πίνακα A που θα κατασκευάσετε για να λύσετε το πρόβλημα.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Βάζοντας τα δεδομένα του πειράματος στην εξίσωση $y = ax + b$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

η οποία δεν έχει λύση. Η αντίστοιχη εξίσωση ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Η λύση ελαχίστων τετραγώνων είναι $\hat{a} = \frac{13}{14}$, $\hat{b} = \frac{10}{14}$. Το διάνυσμα σφάλματος είναι $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$.

Άσκηση 3.10 Αποδείξτε οτι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση εάν και μόνον εάν $y^T b = 0$ για κάθε y που ικανοποιεί $y^T A = 0$.

Άσκηση 3.11 Βρείτε τον πίνακα προβολής P_1 στην ευθεία με διεύθυνση $a = (1, 3)$, καθώς και τον πίνακα προβολής P_2 στην ευθεία που είναι κάθετη στο a. Υπολογίστε τους πίνακες $P_1 + P_2$ και $P_1 P_2$. Εξηγήστε το αποτέλεσμα.