ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 2

18/2/2020

Άσκηση 2.1 Βρείτε την παραγοντοποίηση LU, τους οδηγούς και την ορίζουσα του 4×4 πίνακα με στοιχεία $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Οι οδηγοί είναι 1, 1, 1, 1 και η ορίζουσα είναι 1.

Άσκηση 2.2 Χρησιμοποιήστε τον τύπο της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

όπου C είναι ο 6×6 πίνακας με μπλοκ τους πίνακες A και B. Είναι οι στήλες αυτών των πινάκων γραμμικά ανεξάρτητες;

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\det A = -2$, $\det B = 0$, $\det C = 0$.

Άσκηση 2.3 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A αναπτύσσοντας ως προς την τέταρτη στήλη:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 230.$$

Άσκηση 2.4 Εάν F_n είναι η ορίζουσα του $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα με στοιχεία $1, 1, -1$,

$$F_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε οτι $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Η ακολουθία F_n είναι η ακολουθία Fibonacci, $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

Άσκηση 2.5 Εξηγήστε γιατί εάν $\det A \neq 0$, τότε υπάρχει κάποια μετάθεση P των γραμμών του A τέτοια ώστε να μην υπάρχουν 0 στη διαγώνιο του PA.
Υπόδειξη: Υπάρχει τουλάχιστον ένας από τους $n!$ όρους του τύπου της ορίζουσας που δεν είναι 0;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού η ορίζουσα δεν είναι μηδέν, τουλάχιστον ένας από τους όρους του τύπου της ορίζουσας δεν είναι 0. Άρα υπάρχει μία μετάθεση σ τέτοια ώστε όλες οι συνιστώσες $a_{i\sigma(i)}$ δεν είναι μηδέν. Ανα διατάσσουμε τις γραμμές του πίνακα, έτσι ώστε αυτές οι συνιστώσες να πάνε στη διαγώνιο.

Άσκηση 2.6 Βρείτε τους συμπαράγοντες και τον προσαρτημένο πίνακα. Κατόπιν υπολογίστε τον αντίστροφο πίνακα.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πίνακας συμπαραγόντων $C = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{20} C^T$.

Άσκηση 2.7 Στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα είδαμε οτι για να φέρουμε έναν $n \times n$ πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή με απαλοιφή Gauss, απαιτούνται $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$ πολλαπλασιασμοί ή διαιρέσεις. Πόσοι επιπλέον πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για να υπολογίσουμε την ορίζουσα;
Στον τύπο της ορίζουσας έχουμε $n!$ όρους. Πόσοι πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για να τους υπολογίσουμε;
Συγκρίνετε το κόστος του υπολογισμού της ορίζουσας με απαλοιφή ή με τον τύπο, για $n = 3, 4, 5$ και 10.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Όταν έχουμε τον πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή, απαιτούνται $n-1$ πολλαπλασιασμοί για να υπολογίσουμε την ορίζουσα. Άρα με απαλοιφή απαιτούνται συνολικά $\frac{2n^3+3n^2+n-6}{6}$ πολλαπλασιασμοί ή διαιρέσεις.

Στον τύπο για την ορίζουσα έχουμε $n!$ όρους, και για τον κάθε ένα απαιτούνται $n-1$ πολλαπλασιασμοί. Άρα συνολικά $(n-1)n!$ πολλαπλασιασμοί.

Για $n = 5$ αυτοί οι αριθμοί είναι 54 και 480 αντίστοιχα.

Άσκηση 2.8

α'. Σχεδιάστε το τρίγωνο με κορυφές $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ και $C = (0, 0)$. Θεωρήστε το ως το μισό ενός παραλληλογράμμου, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

β′. Τώρα θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές A, B και $D = (1, -4)$, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABD) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Αφαιρέστε μία γραμμή από τις άλλες δύο).

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου με πλευρές CA και CB. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα που έχει ως γραμμές τις πλευρές του παραλληλογράμμου.

Οι πλευρές του τριγώνου ABD είναι $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$. Αφαιρώντας την τρίτη γραμμή από την πρώτη και τη δεύτερη στην ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ έχουμε $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$, που είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές DA και DB.

Άσκηση 2.9 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Cramer για να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

Άσκηση 2.10 Εξηγήστε γιατί εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι 0, ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι διαφορετικοί από το 0, είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η ορίζουσα είναι γραμμικός συνδυασμός των συμπαραγόντων. Εάν όλοι είναι 0, τότε και η ορίζουσα είναι μηδέν.

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ έχει όλους τους συμπαράγοντες διαφορετικούς από το 0, αλλά δεν είναι αντιστρέψιμος.