3.6 Ιδιοτιμές γραμμικού τελεστή

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V (όχι υποχρεωτικά πεπερασμένης διάστασης) πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Θα μελετήσουμε γραμμικές απεικονίσεις από τον V στον εαυτό του,

$$L : V \longrightarrow V\,.$$

Μία τέτοια απεικόνιση ονομάζεται **γραμμικός τελεστής** στο V (ή **ενδομορφισμός** του V).

Ορισμός 3.3. Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Οι αριθμοί λ του $\mathbb{K}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in V$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$L\,v = \lambda v \tag{3.7}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του γραμμικού τελεστή L, ενώ τα *μη μηδενικά* διανύσματα που ικανοποιούν την 3.7 ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του L για την ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του L για την ιδιοτιμή λ, μαζί με το διάνυσμα 0, αποτελεί ένα γραμμικό υπόχωρο του V που ονομάζεται **ιδιόχωρος** του L για την ιδιοτιμή λ.

Δραστηριότητα 3.13 Ελέγξτε οτι πράγματι ο ιδιόχωρος του L για την ιδιοτιμή λ είναι γραμμικός υπόχωρος του V, δηλαδή οτι είναι κλειστός ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου.

Παράδειγμα 3.13 Ο τελεστής $L = a\mathbf{I}_V \,:\, v \mapsto av$ έχει μοναδική ιδιοτιμή a. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή a. Ο ιδιοχώρος του L για την ιδιοτιμή a είναι όλος ο χώρος V.

Παράδειγμα 3.14 Ο τελεστής $L(x,\,y) = (3x,\,\frac{1}{2}y)$ έχει ιδιοδιάνυσμα $(1,\,0)$ για την ιδιοτιμή 3 και ιδιοδιάνυσμα $(0,\,1)$ για την ιδιοτιμή $\frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 3.15 Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$ στο $\mathbb{R}^2$, $R(x,\,y) = (-y,\,x)$ δεν έχει καμία ιδιοτιμή στο $\mathbb{R}$.
Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$ στο $\mathbb{C}$, $R(z) = \mathrm{i}z$ έχει ιδιοτιμή i, με ιδιόχωρο όλο το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.16 Θεωρούμε τον τελεστή παραγώγισης στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, $D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, που απεικονίζει κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ στην τυπική παράγωγό του, $D(p(x)) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$. Αφού $\deg(D(p(x))) = \deg(p(x)) - 1$, κανένα πολυώνυμο θετικού βαθμού δεν απεικονίζεται σε πολλαπλάσιο του εαυτού του. Η μοναδική ιδιοτιμή του τελεστή D είναι $\lambda = 0$, και ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το σταθερό πολυώνυμο $p(x) = 1$.

Παράδειγμα 3.17 Θεωρούμε τον τελεστή shift στο διανυσματικό χώρο των ακολουθιών με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, που απεικονίζει κάθε ακολουθία (a_n) στην ακολουθία

(b_n), όπου $b_n = a_{n+1}$. Ο τελεστής shift έχει κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$ ως ιδιοτιμή, με ιδιοδιάνυσμα τις αντίστοιχες γεωμετρικές ακολουθίες: Εάν $\lambda \neq 0$ και x_λ είναι η γεωμετρική ακολουθία $x_{\lambda,n} = a\lambda^n$, τότε $s(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$.

Πρόταση 3.11 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ και $M : W \longrightarrow W$ είναι γραμμικοί τελεστές και υπάρχει ισομορφισμός $T : V \longrightarrow W$ τέτοιος ώστε*

$$L = T^{-1} \circ M \circ T$$

τότε οι τελεστές L και M έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Επί πλέον, εάν v είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ, τότε $T(v)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M για την ίδια ιδιοτιμή.

Απόδειξη. Για κάθε $v \in V$ έχουμε $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν $T^{-1} \circ M \circ T(v) = \lambda v$, δηλαδή $M \circ T(v) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Συνεπώς λ είναι ιδιοτιμή του L, με ιδιοδιάνυσμα v, εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του M, με ιδιοδιάνυσμα $T(v)$.

□

Λήμμα 3.12 *Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $L : V \longrightarrow V$ εάν και μόνον εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ είναι ο πυρήνας $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$, και κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ.*

Απόδειξη. Εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, δηλαδή $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς v είναι ιδιοδιάνυσμα του L και λ ιδιοτιμή του L.

Αντίστροφα, εάν $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του L, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, άρα $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι μονομορφισμός.

□

3.7 Πολυώνυμα και τελεστές

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο p με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$p(t) = a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0 \,.$$

Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής στο V, τότε οι δυνάμεις $L^i = L \circ \cdots \circ L$, όπου συνθέτουμε i φορές τον τελεστή L, είναι επίσης γραμμικοί τελεστές στο V. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τελεστή L στη θέση της μεταβλητής του πολυωνύμου,

$$p(L) = a_k L^k + \cdots + a_1 L + a_0 \mathbf{I}_V \,,$$

και το αποτέλεσμα είναι πάλι ένας γραμμικός τελεστής στο V,

$$p(L) : V \longrightarrow V : v \longmapsto a_k L^k(v) + \cdots + a_1 L(v) + a_0 v\,.$$

Παρατηρούμε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, οι τελεστές $p(L)$ και $q(L)$ μετατίθενται:

$$p(L)q(L) = (pq)(L) = (qp)(L) = q(L)p(L)\,.$$

3.8 Ύπαρξη ιδιοτιμών

Θεώρημα 3.13 *Κάθε τελεστής σε ένα μη μηδενικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V, $\dim V = n$, ένα γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$. Τότε η συλλογή v, $L(v)$, $L^2(v)$, …, $L^n(v)$ έχει $n+1$ στοιχεία, και συνεπώς είναι γραμμικά εξαρτημένη. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $a_i \in \mathbb{C}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_n L^n(v) = 0\,.$$

Εάν $a_0 = 0$, τότε κάποιο από τα a_i για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Εάν $a_0 \neq 0$, αφού $v \neq 0$, πάλι κάποιο από τα a_i για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Συνεπώς το πολυώνυμο $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ έχει βαθμό k, για $1 \leq k \leq n$. Δηλαδή υπάρχει θετικός ακέραιος $k \leq n$, τέτοιος ώστε $a_k \neq 0$ και $a_i = 0$ για κάθε $i = k+1, \ldots, n$. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, (Σημειώσεις Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 3) το πολυώνυμο $p(x)$ παραγοντοποιείται σε γινόμενο k διωνύμων, δηλαδή υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = a_k(x - c_1)\cdots(x - c_k)\,.$$

Συνεπώς ο τελεστής $p(L)$ είναι ίσος με τον τελεστή $a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$, και

$$a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)(v) = 0\,.$$

Αφού $v \neq 0$, ο τελεστής $(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$ δεν είναι μονομορφισμός, και συμπεραίνουμε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα i, $1 \leq i \leq k$, για το οποίο η απεικόνιση $L - c_i\mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικονική. Συνεπώς υπάρχει μη μηδενικό $w \in V$ τέτοιο ώστε $(L - c_i\mathbf{I}_V)(w) = 0$, δηλαδή $L(w) = c_i w$, και $\lambda = c_i$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L.

□

3.9 Τελεστές και πίνακες

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n και βάση $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ του V. Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, τότε ο πίνακας ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον

L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο πίνακας που έχει στη γραμμή i και στήλη j το στοιχείο a_{ij} που ορίζεται από τη σχέση

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \,.$$

Πρόταση 3.14 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, βάση $\mathcal{B}$ του V, και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Τότε $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Εάν $v_{\mathcal{B}}$ συμβολίζει το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε, από τον ορισμό του ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ έχουμε

$$(L(v))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} \,.$$

Συνεπώς $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} = (\lambda v)_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}$.

□

Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και L είναι ένας γραμμικός τελεστής στον V, θεωρούμε πίνακες A και B που αντιστοιχούν στον L ως προς διαφορετικές βάσεις του V. Γνωρίζουμε από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα οτι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, και συνεπώς οτι $\det A = \det B$. Εύκολα βλέπουμε οτι οι πίνακες πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}_n$ και $B - \lambda \mathbf{I}_n$ είναι επίσης όμοιοι, και συνεπώς τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι ίσα,

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(B - \lambda \mathbf{I}_n) \,.$$

Συμπεραίνουμε οτι μπορούμε να ορίσουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi_L(\lambda)$ του τελεστή L, να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του L ως προς οποιαδήποτε βάση του V.

Η ακόλουθη πρόταση είναι συνέπεια του αντίστοιχου αποτελέσματος για πίνακες.

Πρόταση 3.15 *Θεωρούμε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ διαφορετικές ιδιοτιμές του L, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_m$. Τότε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Πόρισμα 3.16 *Κάθε τελεστής στο διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, έχει το πολύ $\dim V$ διαφορετικές ιδιοτιμές.*

□

3.10 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Θεωρούμε έναν γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$ σε ένα διανυσματικό χώρο V. Γνωρίζουμε οτι τα σύνολα $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ είναι υπόχωροι του V, και εύκολα ελέγχουμε οτι

$$L(\ker L) \quad \subseteq \quad \ker L$$

$$L(\operatorname{im} L) \subseteq \operatorname{im} L\,.$$

Ο ιδιόχωρος X_λ μίας ιδιοτιμής του L είναι επίσης ένας υπόχωρος του V με την ιδιότητα $L(X_\lambda) \subseteq X_\lambda$.

Ορισμός 3.4. $L : V \longrightarrow V$ γραμμικός τελεστής. Ο υπόχωρος $X \subseteq V$ ονομάζεται **αναλλοίωτος** υπόχωρος από τον τελεστή L, εάν

$$L(X) \subseteq X\,.$$

Προσέξτε οτι δεν υποθέτουμε οτι $L(X) = X$, ούτε οτι $L^{-1}(X) \subseteq X$.

Παράδειγμα 3.18 Για κάθε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, οι υπόχωροι $\{0\}$, V, $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L.

Παράδειγμα 3.19 Για κάθε τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και κάθε ιδιοτιμή λ του L, οι υπόχωροι του ιδιόχωρου της λ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L.

Παράδειγμα 3.20 Θεωρούμε τον τελεστή $L(x, y, z) = (x + z, y, z - y)$. Ο υπόχωρος $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : y = 0\}$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή L: $L(x, 0, z) = (x + z, 0, z) \in U$. Ο υπόχωρος $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x = y = 0\}$ δεν είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή L: $L(0, 0, 1) = (1, 0, 1) \notin W$.

Παράδειγμα 3.21 Θεωρούμε τον τελεστή παραγώγισης στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, $D : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, και τον υπόχωρο $\mathbb{K}_m[x]$των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με m. Αφού κάθε πολυώνυμο βαθμού k απεικονίζεται σε πολυώνυμο μικρότερου βαθμού, ο υπόχωρος $\mathbb{K}_m[x]$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή D.

Παράδειγμα 3.22 Θεωρούμε τον τελεστή shift στο διανυσματικό χώρο των ακολουθιών με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, και τον υπόχωρο X των ακολουθιών που είναι φραγμένες. Αφού μία φραγμένη ακολουθία παραμένει φραγμένη όταν "ξεχάσουμε" τον πρώτο όρο της, ο υπόχωρος X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή shift.

Πρόταση 3.17 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν X και Y είναι υπόχωροι του V αναλλοίωτοι από τον L, τότε $X \cap Y$ και $X + Y$ είναι υπόχωροι αναλλοίωτοι από τον L.*

Πρόταση 3.18 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι τελεστής στο χώρο V, και X είναι υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L, με $\dim V = n$ και $\dim X = k$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλη βάση του V έτσι ώστε ο πίνακας του L ως προς την επιλεγμένη βάση να είναι της μορφής*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

με ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι κάθε βάση $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του X μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του V. Εάν X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και $[a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ τότε

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} v_i \,.$$

Όμως $L(x_j) \in X$ και συνεπώς $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Άρα ο πίνακας (a_{ij}) έχει ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

□

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, γνωρίζουμε οτι για ένα πίνακα της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} B & F \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ισχύει $\det A = \det B \det C$. Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα στον πίνακα πολυωνύμων $A - \lambda\mathbf{I}$, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση[4].

Πρόταση 3.19 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$. Εάν X υπόχωρος του V αναλλοίωτος από τον L, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $L|_X$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L,*

$$\chi_{L|_X}(\lambda) \mid \chi_L(\lambda) \,.$$

Όταν ο διανυσματικός χώρος V διασπάται σε ευθύ άθροισμα δύο ή περισσότερων υπόσωρων, κάθε ένας εκ των οποίων είναι αναλλοίωτος από έναν τελεστή, τότε και ο πίνακας μπορεί να πάρει τη μορφή διαγώνιου πίνακα σε μπλοκ. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για δύο υπόχωρους, και αφήνουμε ως άσκηση τη γενίκευση, με χρήση επαγωγής.

[4] Ο συμβολισμός $a \mid b$ σημαίνει οτι το a διαιρεί το b.

Πρόταση 3.20 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης n, και υπόχωρους X και Y του V, τέτοιους ώστε*

$$V = X \oplus Y\,,$$

με βάσεις $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ του X και $\mathcal{C} = \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ του Y. Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής και X, Y είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του L, τότε ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ είναι διαγώνιος σε μπλοκ, δηλαδή έχει τη μορφή

$${}_{\mathcal{S}}L_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

όπου B είναι ο $k \times k$ πίνακας του τελεστή $L|_X$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και C είναι ο $(n-k)\times(n-k)$ πίνακας του τελεστή $L|_Y$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.
Τότε για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L ισχύει

$$\chi_L(\lambda) = \chi_{L|_X}(\lambda)\,\chi_{L|_Y}(\lambda)\,.$$

Απόδειξη. Εάν ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{S}$ είναι $[a_{ij}]$, τότε για $j = 1, \ldots, k$,

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij}y_i\,.$$

Αλλά $L(x_j) \in X$, άρα $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Παρόμοια, για $j = k+1, \ldots, n$, $a_{ij} = 0$ για $i = 1, \ldots, k$.

Η ιδιότητα των χαρακτηριστικών πολυωνύμων είναι συνέπεια της 3.8.

□

3.11 Βάσεις από ιδιοδιανύσματα

Πρόταση 3.21 *Εάν $L : V \longrightarrow V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του L, τότε ο πίνακας του L ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του τελεστή στη διαγώνιο.*

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση από ιδιοδιανύσματα, και $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i = \lambda_j v_j\,.$$

Αφού τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές είναι μοναδικοί, και

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ \lambda_j & \text{εάν} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι διαγώνιος.

$\square$

Είναι προφανές οτι ισχύει και το αντίστροφο: εάν ο πίνακας του τελεστή L ως προς κάποια βάση είναι διαγώνιος, τότε τα στοιχεία της βάσης είναι ιδιοδιανύσματα του L.

Εάν $\dim V = n$ και ο L έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μία βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του L, και ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι διαγώνιος. Έχουμε δει όμως παραδείγματα όπου υπάρχουν λιγότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και δεν υπάρχει βάση ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι διαγώνιος.

Υπενθυμίζουμε οτι η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής.

Πρόταση 3.22 *Η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι ίση ή μικρότερη από την αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι η ιδιοτιμή λ_1 έχει γεωμετρική πολλαπλότητα k, και επιλέγουμε γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ_1, $v_1, \ldots, v_k$. Συμπληρώνουμε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του V. Αφού για $j = 1, \ldots, k$, $L(v_j) = \lambda_1 v_j$, η στήλη j του πίνακα $A =_{\mathcal{B}} L_{\mathcal{B}}$ έχει στοιχεία $a_{jj} = \lambda_1$ και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_L(\lambda)$ διαιρείται από το $(\lambda - \lambda_1)^k$. Άρα k δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από την πολλαπλότητα της ρίζας λ_1 στο χ_L.

$\square$

3.12 Τριγωνικοί πίνακες

Υπενθυμίζουμε οτι ένας $n \times n$ πίνακας είναι *άνω τριγωνικός* όταν έχει μηδενικά σε όλες τις θέσεις κάτω από τη διαγώνιο, δηλαδή όταν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Ένας άνω τριγωνικός πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν έχει μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε οτι πάνω από το $\mathbb{C}$ μπορούμε πάντα να βρούμε μία βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Πρόταση 3.23 *Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \longrightarrow V$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας A του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι άνω τριγωνικός*
2. *$L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ για $j = 1, \ldots, n$.*
3. *Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L.*

Απόδειξη. Το 2 σημαίνει οτι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει μηδενικά στις τελευταίες $n - j$ θέσεις, που είναι ακριβώς το ίδιο με το 1. Είναι προφανές οτι το 3 συνεπάγεται το 2. Θα δείξουμε οτι το 2 συνεπάγεται το 3. Εάν $v \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$, τότε

$v = a_1 v_1 + \cdots + a_j v_j$. Εάν ισχύει το 2, για κάθε $i = 1, \ldots, j$

$$L(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

Συνεπώς

$$L(v) = a_1 L(v_1) + \cdots + a_j L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

□

Ορισμός 3.5. Ένας $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ είναι **τριγωνοποιήσιμος (πάνω από το** $\mathbb{K}$**)** εάν είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα U, δηλαδή εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R με στοιχεία στο $\mathbb{K}$ τέτοιος ώστε $A = RUR^{-1}$.
Ένας τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι **τριγωνοποιήσιμος** εάν υπάρχει μία διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας του L είναι άνω τριγωνικός.

Πρόταση 3.24 *Υποθέτουμε οτι ο τελεστής $L : V \longrightarrow V$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Τότε οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου του τριγωνικού πίνακα που παριστάνει τον L.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα A της L, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Τότε η απεικόνιση $L - \lambda \mathbf{I}_V$, για $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν λ είναι ίσο με κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

□

Θεώρημα 3.25 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε ο τελεστής L είναι τριγωνοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διάσταση του V. Εάν $\dim V = 1$, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι κάθε 1×1 πίνακας είναι άνω τριγωνικός.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Αφού βρισκόμαστε πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, από το Θεώρημα 3.13, ο L έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή λ_1. Έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ_1. Συμπληρώνουμε το $\{u_1\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του V, και θεωρούμε τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του A περιέχει το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Συνεπώς ο A έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το V ως ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $V_1 = \langle u_1 \rangle$ και $U = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$, έτσι ώστε κάθε $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $v = a_1 u_1 + u$, για $a_1 \in \mathbb{C}$ και $u \in U$. Έχουμε απεικονίσεις $j : U \longrightarrow V : u \mapsto u$ και $p : V \longrightarrow U : v \mapsto u$, και ορίζουμε

$$M = p \circ L \circ j : U \longrightarrow U\,.$$

Για $i = 2, \ldots, n$, $M(u_i) = a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n$, όπου $(a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ είναι η στήλη του πίνακα D που αντιστοιχεί στην i στήλη του πίνακα A. Συνεπώς D είναι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$. Αφού $\dim U = n - 1$, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας της απεικόνισης M είναι άνω τριγωνικός. Εξετάζουμε τώρα τον πίνακα του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Αυτός έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου T είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος παριστάνει την απεικόνιση M ως προς τη βάση $\mathcal{W}$. Συνεπώς ο T είναι άνω τριγωνικός. Συμπεραίνουμε οτι ο πίνακας B του τελεστή L ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$ είναι άνω τριγωνικός.

$\square$

Πρόταση 3.26 *Κάθε τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$ είναι τριγωνοποιήσιμος.*

Παράδειγμα 3.23 Στο χώρο $\mathbb{C}_3[x]$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου ή μικρότερου από 3, με την κανονική διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, ο τελεστής παραγώγισης $D : \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$ παριστάνεται από τον πίνακα

$${}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι ο πίνακας είναι κάτω τριγωνικός. Για να τον μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό αρκεί μία αναδιάταξη της βάσης, $\mathcal{F} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{F}$ είναι

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

με $R^{-1} = R$. Άρα ο άνω τριγωνικός πίνακας είναι

$${}_{\mathcal{F}}D_{\mathcal{F}} = R\,{}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}}R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ας εφαρμόσουμε τη διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος 3.25 για να τριγωνοποιήσουμε τον τελεστή D. Ο D έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με ιδιοδιάνυσμα το σταθερό πολυώνυμο 1. Επιλέγουμε ως πρώτο στοιχείο της βάσης αυτό το πολυώνυμο, και θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{C} = \{1, x^3, x^2, x\}$ ως προς την οποία ο πίνακας του τελεστή D είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο κάτω δεξιά 3×3 πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

παριστάνει τον τελεστή $M : \langle x^3, x^2, x\rangle \longrightarrow \langle x^3, x^2, x\rangle$ που απεικονίζει τα x^3, x^2, x στα $3x^2, 2x, 0$ αντίστοιχα. Αυτός ο τελεστής έχει τριγωνικό πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{C}' = \{x, x^2, x^3\}$. Από αυτή τη διαδικασία, καταλήγουμε οτι ως προς τη βάση $\{1, x, x^2, x^3\} = \mathcal{F}$ ο πίνακας του τελεστή D είναι άνω τριγωνικός, που επαληθεύει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Όταν ο διανυσματικός χώρος V είναι πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, δεν είναι δεδομένη η ύπαρξη ιδιοτιμών. Σε αυτή την περίπτωση για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη βάσης ως προς την οποία ο τελεστής είναι άνω τριγωνικός, πρέπει να υποθέσουμε οτι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1. Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση ενός $n \times n$ πίνακα.

Θεώρημα 3.27 *Θεωρούμε $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία στο $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι τριγωνοποιήσιμος εάν και μόνον εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη. Εάν ο A είναι τριγωνοποιήσιμος, θεωρούμε τριγωνικό πίνακα B όμοιο με τον A, με στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στη διαγώνιο. Τότε $\det(A-\lambda\mathbf{I}) = \det(B-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, και συνεπώς $\chi_A(\lambda)$ είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1 πάνω από το $\mathbb{K}$.

Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων πάνω από το $\mathbb{K}$, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.25 θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Έστω λ_1 τέτοιο ώστε $(\lambda_1-\lambda)$ διαιρεί το $\chi_A(\lambda)$. Τότε λ_1 είναι ιδιοτιμή του A· έστω u_1 ένα ιδιοδιάνυσμα της λ_1. Θεωρούμε αντιστρέψιμο πίνακα R με πρώτη στήλη u_1. Τότε $R^{-1}u_1$ είναι η πρώτη στήλη του ταυτοτικού πίνακα $\mathbf{I}_n$, και $R^{-1}AR$ έχει πρώτη στήλη $R^{-1}Au_1 = \lambda_1 R^{-1}u_1$. Συνεπώς

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου $b = (b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ και B είναι $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας. Από την Πρόταση 3.8, $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)\chi_B(\lambda)$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι γινόμενο παραγόντων βαθμού 1. Από την επαγωγική υπόθεση, ο πίνακας B είναι τριγωνοποιήσιμος. Άρα υπάρχει $(n-1)\times(n-1)$ αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $S^{-1}BS$ να είναι άνω τριγωνικός. Θέτουμε $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} U^{-1}R^{-1}ARU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & bS \\ 0 & S^{-1}BS \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

που είναι άνω τριγωνικός.

□

Παράδειγμα 3.24 Θα εξετάσουμε εάν ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι τριγωνοποιήσιμος. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $\chi_A(x) = -x(x-2)^2$. Αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων ο πίνακας είναι τριγωνοποιήσιμος.

Για να βρούμε τον πίνακα ο οποίος τριγωνοποιεί τον A, υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα. Ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 0 είναι το $(1, 1, 0)$. Η ιδιοτιμή 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2, αλλά γεωμετρική πολλαπλότητα 1: υπάρχει μόνον ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα. Επιλέγουμε το $(1, 1, -2)$. Αυτά τα δύο διανύσματα θα είναι οι δύο πρώτες στήλες του πίνακα R που τριγωνοποιεί τον πίνακα A. Για την τρίτη στήλη μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα έτσι ώστε να έχουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα. Επιλέγουμε το διάνυσμα $(1, -1, 0)$.

Ο πίνακας $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ τριγωνοποιεί τον A. Δηλαδή υπάρχει άνω τριγωνικός πίνακας U τέτοιος ώστε $AR = RU$. Αφού οι δύο πρώτες στήλες του R είναι τα ιδιοδιανύσμτα του A, στις δύο πρώτες στήλες του U έχουμε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Άρα $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, όπου $(a,\, b,\, c)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε $(a,\, b,\, c) = (-1,\, 1,\, 2)$, συνεπώς $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = R^{-1}AR.$

3.13 Θεώρημα Cayley – Hamilton

Παράδειγμα 3.25 Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα Cayley – Hamilton θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix},$$

δηλαδή του $k \times k$ πίνακα $[b_{ij}]$, με $b_{ij} = 0$ όταν $j \neq k$ και $i \neq j+1$, $b_{(j+1)\,j} = 1$ για $j = 1,\, \dots,\, k-1$ και $b_{ik} = a_i$. Αυτό είναι ίσο με την ορίζουσα

$$\det(B - x\mathbf{I}_k) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(B - x\mathbf{I}_n)$ θα χρησιμοποιήσουμε απαλοιφή από κάτω προς τα επάνω, για να απαλείψουμε τα $-x$ στη διαγώνιο. Αφαιρώντας $-x$ φορές την τελευταία γραμμή από την προτελευταία, έχουμε

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1}+a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Συνεχίζουμε, αφαιρώντας $-x$ φορές τη γραμμή i από τη γραμμή $i-1$, για $i = k-1, k-2, \dots, 2$, και καταλήγουμε με την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1} - x^k \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 + a_3 x + \cdots + a_k x^{k-2} - x^{k-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1}+a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix},$$

την οποία αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - x\mathbf{I}) \\ &= (-1)^{k+1}(a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1} - x^k) \\ &= (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1)\,. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.28 (Cayley – Hamilton) *Εάν $\chi_L(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή L, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, τότε ο τελεστής*

$$\chi_L(L) = b_n L^n + \cdots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$$

είναι ο μηδενικός τελεστής: για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)(v) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $\chi_L(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Θα δείξουμε οτι ο τελεστής $\chi_L(L) = b_n L^n + \cdots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$ παίρνει την τιμή 0 σε κάθε $v \in V$, και συνεπώς οτι είναι ο μηδενικός τελεστής.

Εάν $v = 0$ τότε προφανώς $\chi_L(L)(v) = 0$. Υποθέτουμε οτι $v \neq 0$. Εάν $\dim V = n$, θεωρούμε τη συλλογή των διανυσμάτων

$$v_1 = v,\ v_2 = L(v),\ v_3 = L^2(v),\ \dots,\ v_{n+1} = L^n(v)\,.$$

Αφού αυτή περιέχει $n+1$ διανύσματα, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε οτι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε η συλλογή

$v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή $v_1, \ldots, v_{k+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένη και υπάρχουν $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε

$$v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k\,.$$

Επεκτείνουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ σε βάση του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{array}{rcl} L(v_1) & = & v_2 \\ L(v_2) & = & v_3 \\ & \vdots & \\ L(v_{k-1}) & = & v_k \\ L(v_k) & = & v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \end{array}$$

Αυτό σημαίνει οτι ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον L και συνεπώς οτι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει τη μορφή

$${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Ο $k \times k$ πίνακας A έχει στη στήλη j τις k πρώτες συντεταγμένες του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Εάν $j = 1, \ldots, k-1$, $L(v_j) = v_{j+1}$, άρα $a_{(j+1)j} = 1$, και $a_{ij} = 0$ για $i \neq j+1$. Δηλαδή ο πίνακας έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix}.$$

Γνωρίζουμε οτι

$$\begin{array}{rcl} \chi_L(x) & = & \det({}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} - x\mathbf{I}_n) \\ & = & \det(A - x\mathbf{I}_k)\det(D - x\mathbf{I}_{n-k}) \\ & = & \chi_A(x)\chi_D(x) \end{array}$$

ενώ από το Παράδειγμα 3.25 έχουμε οτι

$$\chi_A(x) = (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1)\,.$$

Αντικαθιστούμε L για το x και υπολογίζουμε την τιμή του τελεστή $\chi_A(L)$ στο v:

$$\begin{aligned}
\chi_A(L)(v) &= (-1)^k(L^k(v) - a_k L^{k-1}(v) - \cdots - a_2 L(v) - a_1 v) \\
&= (-1)^k(v_{k+1} - a_k v_k - \cdots - a_2 v_2 - a_1 v_1) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Αφού οι τελεστές $\chi_A(L)$ και $\chi_D(L)$ μετατίθενται,

$$\chi_L(L)(v) = \chi_D(L)\chi_A(L)(v) = 0\,.$$

Τέλος, αφού αυτό ισχύει για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής.

□

Παράδειγμα 3.26 Θεωρούμε τον τελεστή $L(x,\, y) = (x + 2y,\, 3x + 2y)$. Ο πίνακας του L ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_L(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα, ο τελεστής $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής και ο πίνακας $\chi_A(A) = 0$. Πράγματι

$$\chi_A(A) = A^2 - 3A - 4\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Το Θεώρημα Cayley - Hamilton επιτρέπει να απλοποιούμε παραστάσεις με πίνακες, ή να εκφράζουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα ως πολυώνυμο. Αφού $A^2 = 3A + 4\mathbf{I}_2$,

$$\begin{aligned}
A^3 &= 3A^2 + 4A = 3(3A + 4\mathbf{I}_2) + 4A = 13A + 12\mathbf{I}_2\,, \\
A^4 &= 13A^2 + 12A = 13(3A + 4\mathbf{I}_2) + 12A = 51A + 52\mathbf{I}_2\,,\ \text{κ.ο.κ.}
\end{aligned}$$

Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, και ο A είναι αντιστρέψιμος. Αφού $A^2 - 3A = 4\mathbf{I}_2$, έχουμε $A - 3\mathbf{I}_2 = 4A^{-1}$ και συνεπώς $A^{-1} = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}\mathbf{I}_2$.

Παράδειγμα 3.27 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

που έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 7$. Από το Θεώρημα Cayley – Hamilton υπολογίζουμε

$$A^3 = 5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3\,,$$

$$
\begin{aligned}
A^4 &= AA^3 = 5A^3 - 8A^2 + 7A \\
&= 5(5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3) - 8A^2 + 7A \\
&= 17A^2 - 33A + 35\mathbf{I}_3\,, \\
A^5 &= 5A^4 - 8A^3 + 7A^2 \\
&= 5(17A^2 - 33A + 35\mathbf{I}_3) - 8(5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3) + 7A^2\,.
\end{aligned}
$$

Με αυτή τη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε και αρνητικές δυνάμεις ενός πίνακα εάν αυτός είναι αντιστρέψιμος. Αφού ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ δεν είναι μηδέν, μπορούμε να εκφράσουμε το A^{-1} ως πολυώνυμο του A: έχουμε $A^2 = A^3A^{-1} = (5A^2 - 8A + 7\mathbf{I}_3)A^{-1} = 5A - 8\mathbf{I}_3 + 7A^{-1}$. Άρα

$$
A^{-1} = \frac{1}{7}(A^2 - 5A + 8\mathbf{I}_3)\,.
$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^8 - 17x^6 + 33x^5 - 36x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 7x + 1$. Το διαιρούμε με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$:

$$
p(x) = \chi_A(x)(-x^5 - 5x^4 + x) + 2x^2 + 1\,.
$$

Αφού $\chi_A(A) = 0$, έχουμε $p(A) = 2A^2 + \mathbf{I}_3$, δηλαδή

$$
p(A) = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 8 & 11 & 2 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}.
$$

3.14 Ασκήσεις

Άσκηση 3.16 Δίδεται γραμμικός τελεστής $L : V \to V$, και X, Y γραμμικοί υπόχωροι του V αναλλοίωτοι από τον L. Να εξετάσετε εάν οι γραμμικοί υπόχωροι $X + Y$ και $X \cap Y$ είναι αναλλοίωτοι.

Άσκηση 3.17 Αποδείξτε οτι μία γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν το μηδέν δεν είναι ιδιότιμη της L.

Άσκηση 3.18 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $u \mapsto Au$, όπου

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

1. στο $\mathbb{R}^3$
2. στο $\mathbb{C}^3$

Άσκηση 3.19 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή shift στο $\mathbb{R}^\infty$,

$$s(a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots) \;=\; (a_2,\, a_3, \ldots)$$

Άσκηση 3.20 Δίδονται οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και

$$A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 7 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 13 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

1. Για κάθε πίνακα, βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές.
2. Για κάθε ιδιοτιμή, βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα, και τον ιδιόχωρο.
3. Εάν χρειάζεται συμπληρώσετε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, ώστε να κατασκευάσετε μία βάση του $\mathbb{R}^3$, και βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $x \mapsto A_i x$ ως προς αυτήν τη βάση.

Άσκηση 3.21 Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών, με πεπερασμένη διάσταση, γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$, και γραμμικό υπόχωρο X του V, αναλλοίωτο από την L. Δείξτε οτι ο X περιέχει ένα ιδιοδιάνυσμα της L.

Άσκηση 3.22 Έστω L και M δύο γραμμικοί τελεστές στον V, οι οποίοι αντιμετατίθενται: $L \circ M = M \circ L$. Δείξτε οτι τότε κάθε ιδιοχώρος του M είναι αναλλοίωτος από τον L.
Συμπεράνετε οτι οι L και M έχουν ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα.

Άσκηση 3.23 Βρείτε τις ιδιοτιμές ενός άνω τριγωνικού $n \times n$ πίνακα.

Άσκηση 3.24 Θεωρούμε τον 3×3 άνω τριγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τα ιδιοδιανυσματικά του τελεστή $T_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. λ_1, λ_2, λ_3 είναι ανα δύο διαφορετικοί.
2. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3$.
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Άσκηση 3.25 Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Έχει ο τελεστής $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ιδιοτιμές; Συγκρίνετε αυτόν τον τελεστή με τον αντίστοιχο $T_A : \mathbb{C}^2 \to C^2$.

Άσκηση 3.26 Δείξτε οτι, αν ο τετραγωνικός πίνακας A με πραγματικούς συντελεστές, ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$ αυτός δεν επιδέχεται πραγματικές ιδιοτιμές. Συμπεράνετε οτι δεν υπάρχει 3×3 πίνακας με πραγματικούς συντελεστές ο οποίος να ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$.

Άσκηση 3.27 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

1. Δείξτε οτι $A^3 - aA^2 + 2A - I = 0$.
2. Δείξτε οτι ο A είναι αντιστρέψιμος και συμπεράνετε από το α΄ τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}.
3. Υπολογίστε τον πίνακα $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I$.

Άσκηση 3.28 Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Διαγωνιοποιήστε τον τελεστή L.
2. Βρείτε τον πίνακα ως προς την κανονική βάση, του τελεστή $L^6 - 8L^4 + L^3 - 9L + I$.

Άσκηση 3.29 Δίδεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ και οι ακολουθίες u_n και v_n οι οποίες ορίζονται αναδρομικά:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

1. Εξετάστε εάν είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος
2. Υπολογίστε τα u_n και v_n ως συναρτήσεις του n.
3. Βρείτε ακολουθία w_n τέτοια ώστε $w_1 = 1$, $w_2 = 4$ και $w_{n+2} - 15w_{n+1} + 50w_n = 0$.

Άσκηση 3.30 Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

και διαγωνιοποιήστε τον A.

Άσκηση 3.31 Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται **μηδενοδύναμος** εάν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $A^k = 0$. Δείξτε οτι εάν $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή ενός μηδενοδύναμου πίνακα, τότε $\lambda = 0$. Συμπεράνετε οτι $k \leq n$.