ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2019-20
Διδάσκοντες: Θεόδωρος Κατσαούνης
Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 106 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Εργαστήριο Προβλημάτων 1

11/2/2020

Άσκηση 1.1 Εάν ένας 3×3 πίνακας B έχει ορίζουσα $\det B = -1$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(\frac{1}{2}B)$, $\det(-B)$, $\det(B^2)$ και $\det(B^{-1})$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Όταν κάθε γραμμή του 3×3 πίνακα πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{2}$, η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με $(\frac{1}{2})^3$.

Άσκηση 1.2 Πως συνδέονται οι $\det(2A)$, $\det(-A)$ και $\det(A^2)$ με την $\det A$, όταν A είναι πίνακας n επί n;

Άσκηση 1.3 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή, ή γενικότερα πράξεις μεταξύ των γραμμών, για να φέρετε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

σε άνω τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα τους.
Εναλλάξτε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα B, και επαναλάβετε τη διαδικασία.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\det A = 20\,, \qquad \det B = 5\,.$$

Άσκηση 1.4 Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $r_2 - 3r_1$ (δηλαδή τη δεύτερη γραμμή μείον 3 φορές την πρώτη γραμμή), πώς αλλάζει η ορίζουσα;
Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $3r_1 - r_2$, πώς αλλάζει η ορίζουσα;
Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $3r_2 - r_1$, πώς αλλάζει η ορίζουσα;

Απάντηση - Υπόδειξη.
Όταν αντικαταστήσετε τη δεύτερη γραμμή r_2 ενός πίνακα με την $3r_1 - r_2$, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο (Γιατί;).

Άσκηση 1.5 Χρησιμοποιήστε πράξεις μεταξύ των γραμμών για να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Άσκηση 1.6 Καταμετρήστε τις εναλλαγές γραμμών για να βρείτε τις ορίζουσες

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Άρτιο πλήθος εναλλαγών για τον πρώτο πίνακα. Περιττό πλήθος εναλλαγών για το δεύτερο πίνακα.

Άσκηση 1.7 Για κάθε n, πόσες εναλλαγές γραμμών απαιτούνται για να φέρουν τις γραμμές του πίνακα A στην αντίθετη διάταξη PA;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad PA = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα P.

Άσκηση 1.8 Προσδιορίστε εάν οι ακόλουθες μεταθέσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,1\,4\,2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

Γράψτε τους 4×4 πίνακες που τις παριστάνουν, και υπολογίστε τις ορίζουσες.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εφαρμόζουμε τη μετάθεση $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα και έχουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Τώρα βλέπουμε οτι χρειάζονται δύο εναλλαγές για να αναιρέσουμε αυτή τη μετάθεση. Άρα είναι άρτια.

Άσκηση 1.9 Για τους ακόλουθους πίνακες βρείτε τον μοναδικό μη μηδενικό όρο στον τύπο για την ορίζουσα.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει μόνον ένας τρόπος να επιλέξετε 4 μη μηδενικά στοιχεία από διαφορετικές γραμμές και στήλες. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο μοναδικός μη μηδενικός όρο στον τύπο για την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ είναι ο όρος $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$. Αφού η μετάθεση $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$ προκύπτει από δύο εναλλαγές, $\det A = 1$.

Άσκηση 1.10 Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Γιά ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;
Για κάθε τιμή του λ για την οποία ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, βρείτε μία βάση του μηδενόχωρου του πίνακα.