4.8 Ευθύ Αθροισμα

Στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα είδαμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V που παράγεται από την ένωση δύο γραμμικών υποχώρων X και Y, είναι το σύνολο όλων των αθροισμάτων ενός διανύσματος στο X και ενός διανύσματος στο Y. Αυτό το γραμμικό υπόχωρο ονομάσαμε *άθροισμα* των X και Y, και τον συμβολίσαμε

$$X + Y = \{x + y : x \in X,\, y \in Y\}\,.$$

Μία περίπτωση αθροίσματος δύο υποχώρων που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι όταν η τομή των X και Y είναι τετριμμένη. Εάν $X \cap Y = \{0\}$, τότε κάθε διάνυσμα $u \in X + Y$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διανυσμάτων του X και του Y: εάν $x,\, x' \in X$, $y,\, y' \in Y$ και $x + y = x' + y'$, τότε $x = x'$ και $y = y'$. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζουμε το διανυσματικό χώρο $X + Y$ *(εσωτερικό) ευθύ άθροισμα* των X και Y, και το συμβολίζουμε $X \oplus Y$.

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε μία πιο γενική κατασκευή ευθέως αθροίσματος. Ξεκινάμε με δύο διανυσματικούς χώρους V και W, πάνω από το ίδιο σώμα $\mathbb{K}$, και ορίζουμε δομή διανυσματικού χώρου στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W$. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε ένα νέο διανυσματικό χώρο, που περιέχει γραμμικούς υπόχωρους V' και W', ισομορφικούς με τους V και W, και με την ιδιότητα $V' \cap W' = \{0\}$.

Αυτό το νέο διανυσματικό χώρο τον ονομάζουμε *(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα* των V και W, και τον συμβολίζουμε $V \oplus W$. Η χρήση του ίδιου ονόματος και του ίδιου συμβολισμού στις δύο διαφορετικές περιπτώσεις είναι δικαιολογημένη γιατί, όπως θα αποδείξομε, το εξωτερικό ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων V και W είναι ισομορφικό με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποχώρων V' και W',

$$V \oplus W \cong V' + W'\,.$$

Ορισμός 4.4. Θεωρούμε V και W διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W = \{(v,\, w) : v \in V,\, w \in W\}$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του $\mathbb{K}$ ως εξής: για $(v,\, w),\, (x,\, y) \in V \times W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$(v,\, w) + (x,\, y) = (v + x,\, w + y) \qquad \text{και} \qquad a\,(v,\, w) = (a\,v,\, a\,w)\,.$$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $V \times W$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τον οποίο ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** των V και W, και συμβολίζουμε $V \oplus W$.

Παράδειγμα 4.7 Το ευθύ άθροισμα $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που συνήθως συμβολίζουμε $\mathbb{R}^2$. Στοιχεία του είναι τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x,\, y)$, και οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα.

Παράδειγμα 4.8 Εάν V και W είναι δύο διαφορετικοί διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ είναι διαφορετικό από το ευθύ άθροισμα $W \oplus V$. Όμως τα δύο αθροίσματα είναι ισομορφικά:

$$V \oplus W \cong W \oplus V\,.$$

Δραστηριότητα 4.3 Δείξτε οτι η απεικόνιση $(v,\,w) \mapsto (w,\,v)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό $C\,:\,V \oplus W \longrightarrow W \oplus V$.

Παράδειγμα 4.9 Εάν U, V και W είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $(U \oplus V) \oplus W$ και το ευθύ άθροισμα $U \oplus (V \oplus W)$ είναι ισομορφικά:

$$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)\,.$$

Δραστηριότητα 4.4 Δείξτε οτι η απεικόνιση $((u,\,v),\,w)) \mapsto (u,\,(v,\,w))$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό

$$D : (U \oplus V) \oplus W \longrightarrow U \oplus (V \oplus W)\,.$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να ορίσουμε το ευθύ άθροισμα περισσότερων από δύο διανυσματικών χώρων, V_1, V_2, $\ldots$, V_k, ως

$$\bigoplus_{j=1}^{k} V_j = (\cdots((V_1 \oplus V_2) \oplus V_3) \oplus \cdots) \oplus V_k\,,$$

γνωρίζοντας οτι εάν αλλάξουμε τις παρενθέσεις θα έχουμε έναν ισόμορφο διανυσματικό χώρο.

Παράδειγμα 4.10 Συχνά εξετάζουμε έναν $m\times n$ πίνακα ως ένα σύνολο από n στήλες, κάθε μία από τις οποίες είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{K}^n$. Αυτή η προσέγγιση μας οδηγεί να θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο των $m \times n$ πινάκων, $\mathcal{M}(m,\,n,\,\mathbb{K})$ ως ισομορφικό με το ευθύ άθροισμα n διανυσματικών χώρων $\mathbb{K}^m$,

$$\mathcal{M}(m,\,n,\,\mathbb{K}) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K}^m\,.$$

Το ακόλουθο Λήμμα εξηγεί τη σχέση μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού ευθέως αθροίσματος.

Λήμμα 4.6 *Εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, και $X \cap Y = \{0\}$, τότε το (εσωτερικό ευθύ) άθροισμα των X και Y είναι ισομορφικό με το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα:*

$$X + Y \cong X \oplus Y\,.$$

Απόδειξη. Εάν $v \in X + Y \subseteq V$, υπάρχουν μοναδικά $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $v = x + y$. Ορίζουμε την απεικόνιση $L : X + Y \longrightarrow X \oplus Y$ με $L(v) = (x,\,y)$. Από τη μοναδικότητα, η L είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική. □

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ του ισομορφισμού στο Λήμμα 4.6 και του ισομορφισμού που προκύπτει από την επιλογή μίας βάσης του διανυσματικού χώρου V, $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$, ("Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα", Θεώρημα Δομής διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης). Ο ισομορφισμός $X + Y \cong X \oplus Y$ δεν βασίζεται σε κάποια επιλογή: τα x και y είναι μοναδικά καθορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος. Λέμε οτι αυτός είναι ένας **κανονικός ισομορφισμός**, ενώ ο ισομορφισμός $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ δεν είναι κανονικός, αφού εξαρτάται από την επιλογή μίας βάσης του V.

Στο ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ θεωρούμε τους υπόχωρους $V' = V \times \{0\}$ και $W' = \{0\} \times W$. Οι απεικονίσεις $j_1 : V \longrightarrow V'$, $j_1(v) = (v, 0)$, και $j_2 : W \longrightarrow W'$, $j_2(w) = (0, w)$ είναι ισομορφισμοί. Κάθε διάνυσμα στο $V \oplus W$ γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος στο V' και ενός διανύσματος στο W': $(v, w) = (v, 0) + (0, w)$. Οι υπόχωροι V' και W' έχουν τετριμμένη τομή: εάν $(v, w) \in V' \cap W'$ τότε $(v, w) = (0, 0)$. Συνεπώς $V \oplus W = V' + W'$.

Λήμμα 4.7 *Εάν $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα (παράγοντα σύνολα, βάσεις) στους διανυσματικούς χώρους V και W αντίστοιχα, τότε*

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (αντίστοιχα, παράγον σύνολο, βάση) του $V \oplus W$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι τα στοιχεία $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$ του $\mathbb{K}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$a_1(v_1, 0) + \cdots + a_k(v_k, 0) + b_1(0, w_1) + \cdots + b_m(0, w_m) = (0, 0)\,.$$

Τότε ισχύει $(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k, b_1w_1 + \cdots + b_mw_m) = (0, 0)$, και συνεπώς $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$ και $b_1w_1 + \cdots + b_mw_m = 0$.

Αν $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο V, συμπεραίνουμε οτι $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο W, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Δείξαμε οτι

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $V \oplus W$.

Τώρα θεωρούμε στοιχείο $(v, w) \in V \oplus W$. Αν $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι παράγον σύνολο του V, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι παράγον σύνολο του W, υπάρχουν $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $w = b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$. Συμπεραίνουμε οτι

$$(v, w) = a_1(v_1, 0) + \cdots + a_k(v_k, 0) + b_1(0, w_1) + \cdots + b_m(0, w_m)\,,$$

και συνεπώς

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι παράγον σύνολο του $V \oplus W$.

□

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 4.8 *Εάν V και W είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε*

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W .$$

□

Παράδειγμα 4.11 Εάν X και Y είναι ξένα σύνολα, $X \cap Y = \varnothing$, τότε ο διανυσματικός χώρος των απεικονίσεων από το σύνολο $X \cup Y$ στο $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{X\cup Y}$, είναι ισομορφικός με το ευθύ άθροισμα των διανυσματικών χώρων των απεικονίσεων από το X στο $\mathbb{K}$ και από το Y στο $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^{X\cup Y} \cong \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y .$$

Θα κατασκευάσουμε την απεικόνιση $L : \mathbb{K}^{X\cup Y} \longrightarrow \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y$ και θα δείξουμε οτι είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Θεωρούμε $f \in K^{X\cup Y}$, δηλαδή απεικόνιση $f : X\cup Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Τότε ορίζονται οι απεικονίσεις περιορισμού της f στα υποσύνολα X και Y, $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{K}$ και $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{K}$. Ορίζουμε $L(f) = (f|_X,\, f|_Y)$. Η L είναι γραμμική. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} L(f+g) &= ((f+g)|_X,\, (f+g)|_Y) \\ &= (f|_X + g|_X,\, f|_Y + g|_Y) \\ &= (f|_X,\, f|_Y) + (g|_X,\, g|_Y) . \end{aligned}$$

Για να δείξουμε οτι η L είναι ισομορφισμός, ορίζουμε την απεικόνιση $G : \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y \longrightarrow K^{X\cup Y}$, και δείχνουμε οτι είναι αντίστροφη της L. Για $(f_1,\, f_2) \in \mathbb{K}^X \oplus \mathbb{K}^Y$, ορίζουμε $G(f_1,\, f_2) = f$, όπου $f : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{K}$ ορίζεται ως

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{εάν } t \in X , \\ f_2(t) & \text{εάν } t \in Y . \end{cases}$$

Προφανώς, $f|_X = f_1$ και $f|_Y = f_2$, άρα $L \circ G(f_1,\, f_2) = (f_1,\, f_2)$. Επίσης $G \circ L(f) = G(f|_X,\, f|_Y) = f$. Άρα G είναι αντίστροφη της L, και L είναι ισομορφισμός.

Παράδειγμα 4.12 Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους V_1 και V_2 με βάσεις $\mathcal{B}_1 = \{v_{11}, \ldots\ v_{1k}\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{v_{21}, \ldots\ v_{2\ell}\}$ αντίστοιχα, και τους διανυσματικούς χώρους W_1 και W_2 με βάσεις $\mathcal{C}_1 = \{w_{11}, \ldots\ w_{1m}\}$ και $\mathcal{C}_2 = \{w_{21}, \ldots\ w_{2n}\}$ αντίστοιχα.

Εάν $L_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ και $L_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση

$$L_1 \oplus L_2 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$$

η οποία απεικονίζει το διάνυσμα $(u_1,\, u_2) \in V_1 \oplus V_2$ στο διάνυσμα $(L_1(u_1),\, L_2(u_2)) \in W_1 \oplus W_2$.

Εάν A είναι ο πίνακας της L_1 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{C}_1$, και B είναι ο πίνακας της L_2 ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2$ και $\mathcal{C}_2$, τότε ο πίνακας της απεικόνισης $L_1 \oplus L_2$ ως προς τις βάσεις

$$\{(v_{11}, 0), \ldots, (v_{1k}, 0), (0, v_{21}), \ldots, (0, v_{2\ell})\} \quad \text{του } V_1 \oplus V_2 \tag{4.3}$$

και

$$\{(w_{11}, 0), \ldots, (w_{1m}, 0), (0, w_{21}), \ldots, (0, w_{2n})\} \quad \text{του } W_1 \oplus W_2 \tag{4.4}$$

είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Με το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων V και W συνδέονται οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

1. Οι **κανονικές εμφυτεύσεις** του V και του W στο $V \oplus W$,

$$j_1 : V \longrightarrow V \oplus W \ : \ v \mapsto (v, 0)$$
$$j_2 : W \longrightarrow V \oplus W \ : \ w \mapsto (0, w)\,.$$

2. Οι **κανονικές προβολές** του $V \oplus W$ επί των V και W,

$$p_1 : V \oplus W \longrightarrow V \ : \ (v, w) \mapsto v$$
$$p_2 : V \oplus W \longrightarrow W \ : \ (v, w) \mapsto w\,.$$

Παράδειγμα 4.13 Θεωρούμε τους χώρους V_1, V_2, W_1 και W_2 του Παραδείγματος 4.13, και τις απεικονίσεις $j_1 : V_1 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$, $j_2 : V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$ και $p_1 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1$, $p_2 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_2$.

Εάν $L : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε το πίνακας της L ως προς τις βάσεις 4.3 και 4.4, είναι ο

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix},$$

όπου A είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{11} = p_1 \circ L \circ j_1$, C είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{12} = p_1 \circ L \circ j_2$, D είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{21} = p_2 \circ L \circ j_1$ και B είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L_{22} = p_2 \circ L \circ j_2$.

4.9 Χώρος πηλίκο

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμικό υπόχωρο X του V. Στο V ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$v \sim w \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad v - w \in X\,.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης το ονομάζουμε **πηλίκο** του V με το X, και το συμβολίζουμε

$$V/\,X\,.$$

Την κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$ ως προς αυτή τη σχέση τη συμβολίζουμε

$$v + X, \quad \text{ή} \quad \tilde{v}\,.$$

Παράδειγμα 4.14 Στο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{(t,\, t,\, 2t)\,|\, t \in \mathbb{R}\}$. X είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,\,0,\,0)$ και $(1,\,1,\,2)$. Η κλάση ισοδυναμίας του σημείου $(x,\,y,\,z)$ στο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής

$$(x,\,y,\,z) + (t,\,t,\,2t) \quad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή είναι η ευθεία που περνάει από το $(x,\,y,\,z)$ και είναι παράλληλη προς τον X. Το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο όλων των ευθειών στο $\mathbb{R}^3$ που είναι ίσες ή παράλληλες με την X.

Στο πηλίκο $V/\,X$ ορίζουμε τις πράξεις, για $v + X,\, y + X \in V/\,X,\, a \in \mathbb{K}$.

$$(v + X) + (w + X) = (v + w) + X$$

$$a\,(v + X) = a\,v + X\,.$$

Λήμμα 4.9 *Με αυτές τις πράξεις $V/\,X$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{K}$.*

Ο διανυσματικός χώρος $V/\,X$ ονομάζεται **χώρος πηλίκο** του $V \bmod X$.

Απόδειξη. Μηδέν είναι η κλάση του $X = 0{+}X$ και το αντίθετο του $v{+}X$ είναι $-(v{+}X) = (-v) + X$. Εύκολα ελέγχουμε τα υπόλοιπα αξιώματα.

□

Ορίζεται κανονική *επεικόνιση* $P : V \to V/X$, με $v \mapsto v + X$, η οποία είναι γραμμική: εάν $u,\, v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} P(au + v) &= (au + v) + X \\ &= a(u + X) + (v + X) \\ &= aP(u) + P(v)\,. \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.10 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης και υπόχωρο X του V. Εάν $\{x_1,\, \ldots,\, x_k\}$ είναι βάση του X, και $\{x_1,\, \ldots,\, x_k,\, v_1,\, \ldots,\, v_m\}$ βάση του V, τότε $\{v_1 + X,\, \ldots,\, v_m + X\}$ αποτελεί βάση του $V/\,X$, και συνεπώς*

$$\dim(V/\,X) = \dim V - \dim X\,.$$

Απόδειξη. Εστω $v \in V$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ και $b_1, \ldots, b_m$ τέτοια ώστε $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$. Τότε $v - (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) \in X$, άρα

$$\begin{aligned} v + X &= (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) + X \\ &= b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) \end{aligned}$$

άρα $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ παράγουν το V/X.

Έστω $b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) = 0$. Τότε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m \in X$, άρα υπάρχουν $a_1, \cdots, a_k$ τέτοια ώστε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$. Αλλά απο γραμμική ανεξαρτησία των $\{x_1, \cdots, x_k, v_1, \cdots, v_m\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αποτελεί βάση του V/X.

□

Παράδειγμα 4.15 Θεωρούμε το 'πολύεδρο' του σχήματος, με μία έδρα σ, πέντε ακμές α, β, γ, δ, ε και τέσσερεις κορυφές A, B, C, D.

Ορίζουμε τους διανυσματικούς χώρους

$$C_0 = \{a_1A + a_2B + a_3C + a_4D \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_1 = \{b_1\alpha + b_2\beta + \cdots + b_5\varepsilon \mid b_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_2 = \{s\sigma \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\partial_2 : C_2 \to C_1, \qquad \partial_1 : C_1 \to C_0$$

με $\partial_2(\sigma) = \alpha + \delta - \varepsilon$ και

$$\begin{aligned} &\partial_1(b_1\alpha + \cdots + b_5\varepsilon) = \\ &= b_1(B - A) + b_2(C - B) + b_3(D - C) + b_4(A - D) + b_5(B - D) \\ &= (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D. \end{aligned}$$

Σχήμα 4.1, sxhma
Ένα ''πολύεδρο''.

Λήμμα 4.11 (Λήμμα Poincaré)

$$\partial_1 \partial_2 = 0\,.$$

Απόδειξη. $\partial_1\partial_2(\sigma) = \partial_1(\alpha + \delta - \varepsilon) = (B - A) + (A - D) + (B - D) = 0.$ □

Συνεπώς $\operatorname{im}\partial_2 \subseteq \ker\partial_1$ και ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο

$$H_1 = \ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2\,.$$

Θα προσδιορίσουμε μία βάση του H_1. Πρώτα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που ορίζουν το $\ker\partial_1$, και βρίσκουμε οτι τα διανύσματα $\beta+\gamma+\varepsilon$ και $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ αποτελούν μία βάση του χώρου $\ker\partial_1$. Το διάνυσμα $\alpha+\delta-\varepsilon$ αποτελεί μία βάση του $\operatorname{im}\partial_2$. Από το Θεώρημα 4.10, για να προσδιορίσουμε μία βάση του πηλίκου $\ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2$, πρέπει να βρούμε μία βάση του $\ker\partial_1$ η οποία να περιέχει το διάνυσμα $\alpha+\delta-\varepsilon$ της βάσης του $\operatorname{im}\partial_2$. Παρατηρούμε οτι $\alpha+\beta+\gamma+\delta = (\alpha+\delta-\varepsilon)+(\beta+\gamma+\varepsilon)$ και συνεπώς $\{\alpha+\delta-\varepsilon,\, \beta+\gamma+\varepsilon\}$ είναι βάση του $\ker\partial_1$. Συμπεραίνουμε οτι το διάνυσμα $(\beta+\gamma+\varepsilon)+\operatorname{im}\partial_2$ αποτελεί βάση του H_1.

Η διάσταση του H_1 μετράει τις 'τρύπες' στο πολύεδρο. Το στοιχείο της συγκεκριμένης βάσης που βρήκαμε διαγράφει έναν 'κύκλο' γύρω από την τρύπα του πολυέδρου.

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα Ισομορφισμού) *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$.*

1. *Η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \longrightarrow W$, $\tilde{L}(v+\ker L) = L(v)$, είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και η L παραγοντοποιείται ως σύνθεση $L = \tilde{L}\circ P$, όπου $P : V \longrightarrow V/\ker L$ είναι η κανονική επεικόνιση $v \longmapsto v+\ker L$.*

2. *Υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$V/\ker L \cong \operatorname{im} L\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλάση ισοδυναμίας του v στο $V/\ker L$, δηλαδή $v+\ker L = \{u \in V \,|\, u - v \in \ker L\}$. Παρατηρούμε οτι εάν $u \in v+\ker L$ τότε $L(u) = L(v)$. Αρα η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \longrightarrow W$, $\tilde{L}(v+\ker L) = L(v)$ είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι η $\tilde{L}$ είναι γραμμική:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\left(a(v+\ker L)+(u+\ker L)\right) &= \tilde{L}\left((a\,v+u)+\ker L\right)\\
&= L(a\,v+u)\\
&= a\,L(v)+L(u)\\
&= a\,\tilde{L}(v+\ker L)+\tilde{L}(u+\ker L)\,.
\end{aligned}$$

Η $\tilde{L}$ είναι μονομορφισμός, εφ' όσον εάν $L(v) = L(u)$, τότε $v - u \in \ker L$ και $v+\ker L = u+\ker L$. Η $\tilde{L}$ είναι επεικονική στην εικόνα της L, γιατί εάν $w = L(v)$, τότε $w = \tilde{L}(v+\ker L)$.

Συμπεραίνουμε οτι $\tilde{L}$ είναι ισομορφισμός από το πηλίκο $V/\ker L$ στην εικόνα $\operatorname{im} L$.

□

Στη συνέχεια δίδουμε δύο άλλα αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται ως Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.

Πρόταση 4.13 (Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.)

1. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V. Τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(X+Y)/Y \cong X/(X\cap Y)\,.$$

2. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και X, Y γραμμικούς υπόχωρους του V τέτοιους ώστε $X \subseteq Y$. Τότε Y/X είναι υπόχωρος του V/X, και υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*
$$(V/X)/(Y/X) \cong V/Y\,.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Δεύτερου Θεωρήματος Ισομορφισμού, θεωρούμε το μονομορφισμό $i : X \longrightarrow X+Y$ και τον επιμορφισμό $p : X+Y \longrightarrow (X+Y)/Y$. Θα δείξουμε οτι η σύνθεση $L = p\circ i$ είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $X\cap Y$.

Συγκεκριμένα θα δείξουμε οτι για κάθε $(x+y)+Y \in (X+Y)/Y$, $L(x) = (x+y)+Y$. Πράγματι, αφού $y\in Y$, $(x+y)+Y = x+Y = L(x)$. Άρα L είναι επιμορφισμός. Εάν $x\in\ker L$, τότε $L(x) = x+Y = 0+Y$, δηλαδή $x\in Y$. Άρα ο πυρήνας είναι ακριβώς $X\cap Y$. Από το Θεώρημα Ισομορφισμού,
$$(X+Y)/Y \cong X/\,(X\cap Y)\,.$$

Για την απόδειξη του Τρίτου Θεωρήματος Ισομορφισμού, θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $X\subseteq Y\subseteq V$. Τότε προφανώς $Y/\,X$ είναι υποσύνολο του $V/\,X$. Για να δείξουμε οτι είναι γραμμικός υπόχωρος, θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό $a(y_1+X)+(y_2+X)$ με y_1, $y_2\in Y$. Αυτός είναι ίσος με $(ay_1+y_2)+X$ και συνεπώς ανήκει στο $Y/\,X$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την αντιστοίχιση $v+X \longmapsto v+Y$, για $v\in V$. Αυτή δίδει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $L : V/\,X \longrightarrow V/Y$, αφού εάν $v_1-v_2\in X$, τότε $v_1-v_2\in Y$, και συνεπώς εάν $v_1+X = v_2+X$, τότε $L(v_1+X) = L(v_2+X)$. Θα δείξουμε οτι η L είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $Y/\,X$. Θεωρούμε $v+Y\in V/Y$. Τότε $v+X\in V/\,X$ και $L(v+X) = v+Y$, συνεπώς L είναι επιμορφισμός. Η κλάση $v+X$ ανήκει στον πυρήνα της L εάν και μόνον εάν $L(v+X) = 0+Y$, δηλαδή $v\in Y$ και $v+X\in Y/\,X$. Άρα $\ker L = V/Y$. Από το Θεώρημα Ισομορφισμού,
$$V/Y \cong (V/\,X)/\,(Y/\,X)\,.$$

□

Παράδειγμα 4.16 Υπάρχει επίσης ισομορφισμός $V \cong \ker L \oplus \operatorname{im} L$, αλλά αυτός δεν είναι κανονικός. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ του $\operatorname{im} L$, και $v_1, \ldots, v_m$ τέτοια ώστε $L(v_i) = w_i$, τότε τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ορίζεται γραμμική ενεικόνιση, $M_2 : \operatorname{im} L \to V : w_i \mapsto v_i$. Η απεικόνιση

$$M : \ker L \oplus \operatorname{im} L \to V : (v, w) \mapsto v + M_2(w)$$

είναι ισομορφισμός, αλλά εξαρτάται από την επιλογή των v_i.

4.10 Δυϊκοί χώροι

Εχουμε δεί οτι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από ένα διανυσματικό χώρο V σε ένα διανυσματικό χώρο W είναι επίσης διανυσματικός χώρος, ο $\mathcal{L}(U, V)$. Στην περίπτωση που W είναι ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbb{K}$, ονομάζουμε τον $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ **δυϊκό χώρο** του V, και τον συμβολίζουμε V'.

Παράδειγμα 4.17 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ ορίζονται οι *συναρτήσεις συντεταγμένων* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\varphi_k(x) = x_k$.

Εάν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, έχουμε $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Εάν $\psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση, η ψ καθορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης: εάν $\psi(e_i) = a_i \in \mathbb{K}$, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1\psi(e_1) + \cdots + x_n\psi(e_n) \\ &= x_1a_1 + \cdots + x_na_n \,, \end{aligned}$$

δηλαδή, για κάθε γραμμική συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $\psi(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων $x_i = \varphi_i(x)$ του x,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x_1a_1 + \cdots + x_na_n \\ &= \varphi_1(x)a_1 + \cdots + \varphi_n(x)a_n \,, \end{aligned}$$

αλλά καθώς ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}$ είναι μεταθετικός,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) \\ &= (a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n)(x) \,. \end{aligned}$$

Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$, έχουμε $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$, και οι συναρτήσεις συντεταγμένων φ_i παράγουν το δυϊκό χώρο $(\mathbb{K}^n)'$.

Συμβολισμός. Εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό των συναρτήσεων, $\varphi(x) = a$, για στοιχεία του δυϊκού χώρου χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$\langle x, \varphi \rangle = a \,.$$